

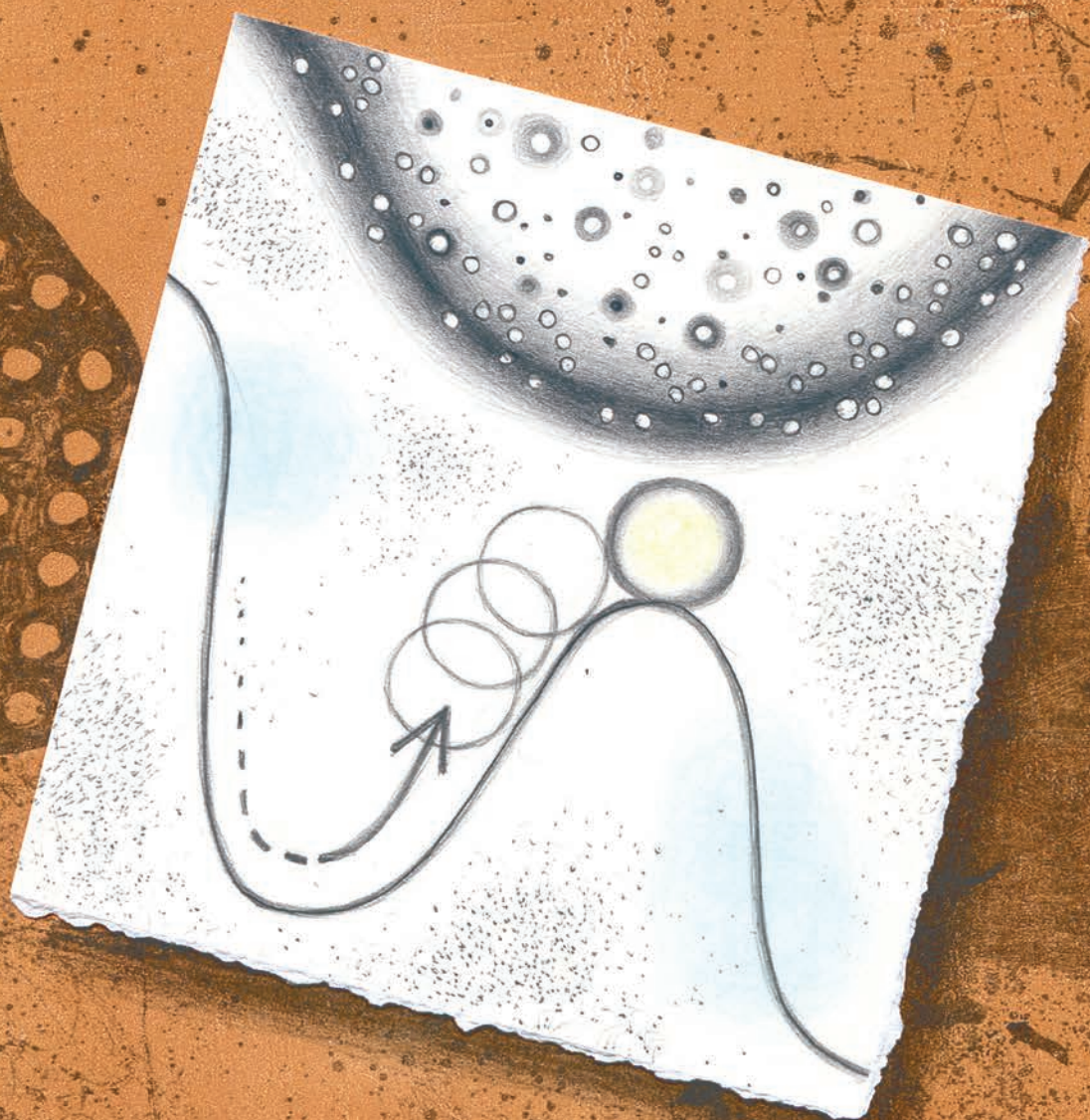
ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2017 · № 2

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# СЕМЬ ГОЛОВОЛОМОК С ТЕТРАМИНО

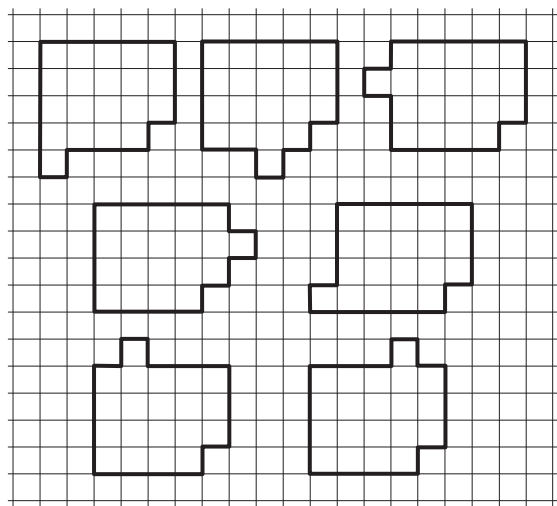


Фигурки тетрамино хорошо знакомы всем по игре «Тетрис» и многим головоломкам. Каждая из них – это многоугольник, составленный из четырех одинаковых квадратов. Есть пять видов тетрамино, вот они:



Легко заметить, что суммарная площадь этого набора равна 20 клеткам. При этом их нельзя разместить в прямоугольной рамке 4x5 клеток (попробуйте это доказать). Зато если этот прямоугольник слегка «подправить», переклеив одну клетку на другое место, то набор тетрамино в такую новую рамку уже поместится. Таким образом, получается сразу семь головоломок: правильные рамки показаны справа.

Желаем успеха в их решении!





# КВАНТ

ФЕВРАЛЬ 2017

№ 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.Л.Семенов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,  
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.А.Заславский,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель  
главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

## ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев,  
И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица,  
В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,  
В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер**

- 2 Об одной «олимпиадной» задаче про графы.  
*А.Райгородский*
- 9 Космология Фридмана: горы реальные и  
потенциальные (окончание). *С.Дворянинов,  
В.Соловьев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи М2450–М2453, Ф2457–Ф2460  
16 Решения задач М2436–М2440, Ф2443–Ф2447  
21 Какие бывают повороты. *С.Дворянинов,  
П.Кожевников*

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 24 Задачи

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 25 Термодинамика и мотоцикл. *А.Стасенко*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 27 Принцип Ферма и необычное поведение света.  
*М.Ромашка, М.Ермилов*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Инвенсоры

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 36 Задачи 16–19

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 37 Птолемея ось треугольника. *К.Козеренко,  
П.Факанов*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 41 Эксперименты с эффектом Магнуса.  
*А.Андреев, А.Панов, П.Панов*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 45 Загадка целых углов. *К.Кноп*

## ОЛИМПИАДЫ

- 52 XXXVIII Турнир городов  
54 Муниципальный этап Всероссийской  
олимпиады школьников по физике  
58 Ответы, указания, решения  
Нам пишут (50, 51)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Космология  
Фридмана ...»*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

# Об одной «олимпиадной» задаче про графы

А.РАЙГОРОДСКИЙ

## 1. Постановка задачи

На Московской олимпиаде 2016 года мне довелось поруководить составлением варианта 9-го класса. И даже сочинить для него 6-ю задачу. Подобное уже случалось, например, в 2010 году, и в результате появилась моя работа со Львом Шабановым, а также наша совместная статья в Кванте (см. [1]). Вот и теперь мне хочется рассказать о задаче и о том, с какими замечательными объектами «большой науки» она связана. Начнем с олимпиадной формулировки.

**Задача.** *В стране лингвистов существует  $n$  языков. Там живет  $m$  людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые двое из которых могут поговорить без посредников, равно  $k$ . Оказалось, что  $11n \leq k \leq \frac{m}{2}$ . Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы  $mn$  пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.*

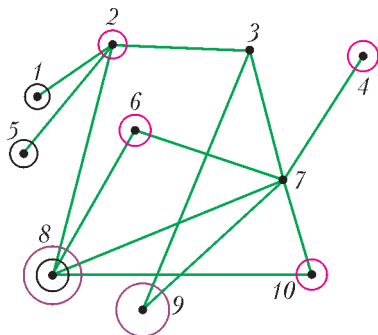
Задачу в результате решили два человека. Один из них доказал даже более сильную оценку – «хотя бы  $4mn$  пар людей», а другой написал забавный комментарий: «Это похоже на кнезеровский граф». Про оценку первого 9-классника, получившего за нее спецприз, мы поговорим в пятом разделе, а кнезеровские графы обсудим прямо сейчас: комментарий второго 9-классника совершенно по делу!

Давайте сведем нашу задачу к задаче

о графе. Для этого обозначим языки числами  $1, 2, \dots, n$ , а лингвистов будем представлять тройками чисел – номерами их языков. Скажем, что вершина графа – это и есть тройка чисел (лингвист) и две вершины соединены ребром, если соответствующие тройки не пересекаются. Тогда выражение «могут поговорить без посредников» означает «нет ребра». Понятно, что  $m$  – это число вершин. А что же такое  $k$  как характеристика нашего графа?

Назовем множество вершин произвольного графа *независимым*, если никакие две вершины в этом множестве не соединены ребром. На рисунке приведены примеры независимых множеств. Количество вершин в любом из самых больших независимых множеств графа  $G$  называется *числом независимости* и обозначается  $\alpha(G)$ . Ясно, что в этих терминах  $k$  и есть число независимости нашего графа.

Наконец, пусть даны числа  $n$  и  $r$ . Назовем *кнезеровским* граф  $KG_{n,r}$ , у которого вершины – это все возмож-



Примеры независимости множеств:  $\{1, 5, 8\}$ ,  $\{2, 4, 6, 10\}$ ,  $\{8, 9\}$

ные  $r$ -элементные подмножества множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  (всего вершин  $C_n^r$ ), а ребра образуют все возможные пары непересекающихся вершин (легко понять, что всего ребер  $\frac{1}{2}C_n^r C_{n-r}^r$ ).

Является ли кнезеровским наш граф? Не совсем. Наш граф – это подграф кнезеровского графа  $KG_{n,3}$  на  $m$  вершинах. Осознав все это, приходим к следующей переформулировке задачи.

**Задача’.** Пусть  $G$  – произвольный подграф графа  $KG_{n,3}$  с  $m$  вершинами и числом независимости  $k$ , удовлетворяющим неравенствам  $11n \leq k \leq \frac{m}{2}$ .

Докажите, что тогда число ребер графа  $G$  не меньше  $mn$ .

Сразу ясно, что  $m \leq C_n^3$  и что в то же время  $m \geq 22n$ , т.е., в частности,  $n \geq 13$ .

Отметим, что о кнезеровских графах мы и явно, и неявно уже не раз писали на страницах «Кванта». В статье [2] мы рассказали об удивительной связи топологии с задачей отыскания «хроматического числа» графа  $KG_{n,r}$ . А недавно вышла статья [3], в которой доказана замечательная теорема Эрдеша–Ко–Радо, утверждающая, что при  $r \leq \frac{n}{2}$  имеет место равенство  $\alpha(KG_{n,r}) = C_{n-1}^{r-1}$ . В той статье выражение «кнезеровский граф» не встречается, но суть остается неизменной. Кстати, оценка  $\alpha(KG_{n,r}) \geq C_{n-1}^{r-1}$  очевидна: достаточно взять независимое множество, в котором все вершины содержат элемент 1. Иными словами, пафос теоремы Эрдеша–Ко–Радо в том, что больших независимых множеств не бывает.

Дальше мы построим наше изложение так: в разделе 2 расскажем о классическом «турановском» подходе к решению задач, подобных нашей, и

обнаружим, что подход результата не дает (впрочем, в разделе 4 нам этот подход еще сослужит добрую службу); в разделе 3 мы приведем «каноническое» решение задачи, т.е. то, которое влечет в аккурат оценку величиной  $mn$ ; в разделе 4 обсудим замечательный недавний результат об устойчивости числа независимости кнезеровского графа к случайным разрушениям ребер (это и будет кульминацией статьи, так как именно тогда станет ясно, зачем в науке нужна наша олимпиадная задача); в пятом разделе мы скажем несколько слов об улучшениях оценки в олимпиадной задаче и о том, как это отражается на большой науке; в разделе 6 поговорим про неожиданную связь нынешней темы с темой нашей же квантовской статьи [1] о другой олимпиадной задаче.

## 2. Неудачная попытка решить задачу

Пусть  $G = (V, E)$  – наш подграф. Рассмотрим произвольное независимое множество  $W \subset V$ , имеющее максимальную мощность, т.е.  $|W| = k$ . Ясно, что каждая вершина из множества  $V \setminus W$  имеет хотя бы одного соседа в  $W$  (иначе  $W$  не максимально). Таким образом, мы имеем не менее  $m - k$  различных ребер в графе  $G$ . Удалим из графа  $G$  множество  $W$  вместе со всеми ребрами, концы которых принадлежат  $W$ . Получится новый граф  $G'$ , у которого  $m - k$  вершин и  $\alpha(G') \leq k$ . Возьмем в  $G'$  максимальное по мощности независимое множество вершин  $W'$ . Снова понимаем, что каждая вершина из множества  $V \setminus W \setminus W'$  соединена хотя бы с одной вершиной из  $W'$ . Имеем как минимум  $m - 2k$  новых ребер. И так далее. В итоге получаем

$$|E| \geq (m - k) + (m - 2k) + \dots + (m - [m/k]k),$$

где  $[x]$  – это целая часть числа  $x$ . Просуммировав, имеем

$$|E| \geq m \left[ \frac{m}{k} \right] - k \frac{\left[ \frac{m}{k} \right] \left( \left[ \frac{m}{k} \right] + 1 \right)}{2}.$$

Эту несложную идею придумал в 1941 году замечательный венгерский математик Пал Туран. Легко показать, что в общем случае оценку Турана улучшить нельзя (подумайте над примером!). Что же, однако, дает оценка в условиях нашей задачи?

Мы знаем, что  $k \leq \frac{m}{2}$ , откуда  $[m/k] \geq 2$ . Следовательно,  $m[m/k] \geq 2m$ . Даже если бы в оценке Турана не было вычитаемого, то и тогда бы мы оказались крайне далеки от искомого неравенства  $|E| \geq mn$ .

Не удалась попытка! Ну ничего: неравенством Турана мы еще воспользуемся в разделе 4, а в разделе 3 мы приведем решение олимпиадной задачи. Разумеется, оно будет использовать специфику кнезеровского графа, которую турановское рассуждение никак не улавливает.

### 3. Решение задачи

Будем рассуждать так же, как в начале турановского доказательства: берем максимальное по мощности независимое множество  $W \subset V$ ,  $|W| = k$ ; по-прежнему каждая вершина из  $V \setminus W$  имеет соседа в  $W$ . Пусть, например, вершина  $A \in (V \setminus W)$  соединена ребром с вершиной  $B \in W$ . Это значит, что по определению кнезеровского графа  $A \cap B = \emptyset$ .

Покажем, что помимо  $B$  в  $W$  есть еще масса вершин, соединенных ребрами с  $A$ . Пусть, напротив,  $C \in W$  и  $(C, A) \notin E$  (вершина  $C$  не соединена ребром с вершиной  $A$ ). Тогда, разумеется,  $C \cap A \neq \emptyset$ . Более того, поскольку  $W$  – независимое множество, имеем

также  $C \cap B \neq \emptyset$ . Таким образом, вершина (тройка)  $C$  пересекается с обеими тройками  $A$  и  $B$ . Общее количество троек, которые в принципе могут обладать указанным свойством, заведомо не превосходит  $9n$  (тремья способами выбирается общий элемент  $C$  и  $A$ , еще тремя способами выбирается общий элемент  $C$  и  $B$ , и, наконец,  $n$  – верхняя оценка числа способов добавить третий элемент к двум выбранным). Значит, количество вершин из  $W$ , которые соединены ребрами с  $A$ , никак не меньше  $k - 9n$ . Но  $k \geq 11n$ , откуда получаем, что у вершины  $A$  не менее  $2n$  соседей в  $W$ .

Полученная оценка числа соседей верна для каждой вершины  $A \in (V \setminus W)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |E| &\geq 2n|V \setminus W| = \\ &= 2n(m - k) \geq 2n \cdot \frac{m}{2} = mn. \end{aligned}$$

Задача решена! Более того, нам хватило только одного – первого – шага турановского рассуждения.

Заметим, что параметры в задаче подобраны для красоты. Из приведенного рассуждения видно, что всегда верна оценка

$$|E| \geq (k - 9n)(m - k),$$

и этим результатом мы еще воспользуемся в разделе 4.

### 4. Случайные подграфы кнезеровских графов

**Удивительный результат.** Рассмотрим кнезеровский граф. Например,  $KG_{n,3}$ . Возьмем монетку, которая с вероятностью  $1/2$  падает кверху решкой и с вероятностью  $1/2$  – орлом. Подбросим монетку столько раз, сколько есть ребер в графе  $KG_{n,3}$ . Если при очередном бросании получается решка, проводим очередное ребро. Иначе – не проводим. Возникает «случайный

подграф кнезеровского графа»  $KG_{n,3,1/2}$ . Мы не знаем, сколько в нем ребер: все зависит от случая. Однако интуитивно ясно, что в среднем половина ребер пропадет. Казалось бы, разгром значительный и велик шанс, что число независимости тоже существенно вырастет. Может же, скажем, «случайно» получиться граф, в котором и вовсе нет ребер: у него число независимости равно  $C_n^3$  (число всех вершин), тогда как у исходного графа число независимости, согласно теореме Эрдеша–Ко–Радо, равнялось  $C_{n-1}^2$ . При этом

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \frac{n^3}{6},$$

$$C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \sim \frac{n^2}{2},$$

т.е. разница огромная. Мы пишем « $f(n) \sim g(n)$ » для функций  $f$  и  $g$ , принимающих ненулевые значения, если  $f(n)/g(n) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тем не менее, имеет место совершенно удивительный результат: с вероятностью, стремящейся к единице, при  $n$ , стремящемся к бесконечности, число независимости случайного подграфа кнезеровского графа почти не растет. Вот точная формулировка.

**Теорема 1.** *С вероятностью, стремящейся к единице, при  $n$ , стремящемся к бесконечности, число независимости случайного подграфа кнезеровского графа не превосходит величины  $C_{n-1}^2(1+1/n)$ . Более коротко это записывают так:*

$$P(\alpha(KG_{n,3,1/2}) \leq C_{n-1}^2(1+1/n)) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 1 говорит, что если число независимости и растет при удалении примерно половины ребер, то не более чем в  $1 + \frac{1}{n}$  раз. Это поразительно!

Именно для доказательства теоремы 1 и нужен результат олимпиадной за-

дачи. В этом мы убедимся в следующем параграфе.

**Доказательство удивительного результата.** Положим

$$m = \left[ C_{n-1}^2(1+1/n) \right],$$

где квадратные скобки по-прежнему обозначают целую часть числа. Выбор буквы  $m$  не случаен! Скоро мы увидим, что это то самое  $m$ , которое фигурирует в олимпиадной задаче.

Нам достаточно доказать, что

$$P(\alpha(KG_{n,3,1/2}) \leq m-1) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$P(\alpha(KG_{n,3,1/2}) > m-1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Давайте скажем явно, что это за события, про которые мы хотим доказать, что их вероятности стремятся к 0. Событие « $\alpha(KG_{n,3,1/2}) > m-1$ » состоит в том, что найдется множество вершин кнезеровского графа, которое имеет мощность  $m$  и в котором пропали все ребра после того, как мы побросали монетку в процессе построения графа  $KG_{n,3,1/2}$ . Подчеркнем, что в исходном графе в любом множестве вершин мощности  $m$  ребра есть ввиду теоремы Эрдеша–Ко–Радо.

Перечислим все множества вершин кнезеровского графа мощности  $m$ . Их количество, которое мы обозначим  $N$ , равно  $C_n^m$ . Обозначим сами множества  $A_1, \dots, A_N$ . Для каждого  $i \in \{1, \dots, N\}$  рассмотрим событие  $B_i$ , состоящее в том, что в множестве  $A_i$  пропали все ребра. Тогда наше событие « $\alpha(KG_{n,3,1/2}) > m-1$ » можно описать так: «произошло хотя бы одно из событий  $B_i$ ». А значит,

$$P(\alpha(KG_{n,3,1/2}) > m-1) \leq \sum_{i=1}^N P(B_i).$$

Чему же равна вероятность события  $B_i$ ? Каждое ребро, находившееся в

множестве  $A_i$ , пропадает с вероятностью  $\frac{1}{2}$ . Если число ребер в  $A_i$  изначально (т.е. в исходном кнезеровском графе) равно некоторой величине  $e_i$ , то, разумеется,  $P(B_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{e_i}$ . Однако мы не знаем  $e_i$ !

Поскольку нам нужны верхние оценки вероятностей, величины  $e_i$  нужно оценивать снизу. Но в этом-то и состоит смысл турановских оценок и оценки из олимпиадной задачи.

Пусть  $G_i$  – подграф кнезеровского графа, порожденный множеством вершин  $A_i$ , т.е. множество его вершин и есть  $A_i$ , а ребер в нем ровно  $e_i$ . Обозначим  $k_i$  число независимости этого графа. Все, мы попали в условия олимпиадной задачи: есть подграф кнезеровского графа на  $m$  вершинах, есть его число независимости  $k_i$ , и нам нужно оценить снизу число его ребер  $e_i$ . Мы знаем, что если  $11n \leq k_i \leq \frac{m}{2}$ , то гораздо лучше применять олимпиадную оценку  $e_i \geq mn$ . Что ж, это подсказывает, как надо действовать.

Итак, разобьем сумму  $\sum_{i=1}^N P(B_i)$  на три части:

$$\sum_{i=1}^N P(B_i) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

В первой части будут только те слагаемые, для которых  $k_i < 11n$ , во второй – только те, для которых  $11n \leq k_i \leq \frac{m}{2}$ , в третьей – только те, для которых  $\frac{m}{2} < k_i \leq C_{n-1}^2$ . Благодаря теореме Эрдеша–Ко–Радо мы знаем, что других слагаемых и не бывает.

Для слагаемых в  $\Sigma_1$  применим оценку Турана:

$$e_i \geq m \left\lfloor \frac{m}{k_i} \right\rfloor - k_i \frac{\left\lfloor \frac{m}{k_i} \right\rfloor \left( \left\lfloor \frac{m}{k_i} \right\rfloor + 1 \right)}{2}.$$

Заметим, что

$$m = \left[ C_{n-1}^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] \sim \frac{n^2}{2}, \quad k_i < 11n.$$

Значит, под знаками целых частей стоят стремящиеся к бесконечности функции, откуда

$$m \left\lfloor \frac{m}{k_i} \right\rfloor \sim \frac{m^2}{k_i}, \quad k_i \frac{\left\lfloor \frac{m}{k_i} \right\rfloor \left( \left\lfloor \frac{m}{k_i} \right\rfloor + 1 \right)}{2} \sim \frac{m^2}{2k_i},$$

т.е.

$$e_i \geq \Phi_1 \cdot \frac{m^2}{2k_i} > \Phi_2 \cdot \frac{n^4}{88n} = \Phi_2 \cdot \frac{n^3}{88},$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – некоторые величины, стремящиеся к единице (запись  $f \sim g$  равносильна записи  $f = \Phi \cdot g$ ).

Для слагаемых в  $\Sigma_2$  применим оценку из олимпиадной задачи:

$$e_i \geq mn \geq \Phi_3 \cdot \frac{n^3}{2}.$$

Для слагаемых в  $\Sigma_3$  применим обобщение оценки из олимпиадной задачи (см. конец раздела 3):

$$\begin{aligned} e_i &\geq (k_i - 9n)(m - k_i) \geq \\ &\geq \left( \frac{m}{2} - 9n \right) \left( \left[ C_{n-1}^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] - k_i \right) \geq \\ &\geq \left( \frac{m}{2} - 9n \right) \left( C_{n-1}^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 - k_i \right) \geq \\ &\geq \left( \frac{m}{2} - 9n \right) \left( C_{n-1}^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 - C_{n-1}^2 \right) = \\ &= \left( \frac{m}{2} - 9n \right) \left( \frac{C_{n-1}^2}{n} - 1 \right) = \Phi_4 \cdot \frac{n^2}{4} \cdot \frac{n}{2} = \\ &= \Phi_4 \cdot \frac{n^3}{8}. \end{aligned}$$

Видно, что во всех трех случаях получается оценка, кубическая по  $n$  и от  $i$  не зависящая. Поскольку нас интересует в итоге предел, то мы спокойно пренебрегаем маленькими значениями  $n$  и говорим, что всегда

$$e_i \geq \frac{n^3}{100}$$



(константа в знаменателе, как мы увидим, не принципиальна). Получаем

$$\sum_{i=1}^N P(B_i) \leq N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n^3/100} = N \cdot 2^{-n^3/100}.$$

Оценим величину  $N$ . Для этого воспользуемся неравенством  $b! \geq \left(\frac{b}{e}\right)^b$ , где  $e = 2,71828\dots$  – основание натурального логарифма (докажите это неравенство с помощью индукции). А именно, заметим, что

$$C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)\dots(a-b+1)}{b!} \leq \left(\frac{ae}{b}\right)^b,$$

откуда (с учетом, что при больших  $n$  выполнено  $\frac{n^2}{3} < m < n^2$  с огромным запасом)

$$N = C_{C_n^3}^3 \leq \left(\frac{eC_n^3}{m}\right)^m < \left(\frac{n^3}{m}\right)^m < (3n)^{n^2} = 2^{n^2 \log_2(3n)}.$$

В итоге

$$N \cdot 2^{-n^3/100} < 2^{n^2 \log_2(3n) - n^3/100} \rightarrow 0,$$

и теорема доказана!

### 5. Про улучшение оценки в олимпиадной задаче

Откуда же взялось улучшение оценки в олимпиадной задаче? А дело в том, что в ее условиях удастся доказать, что максимальное независимое множество (то самое, которое имеет мощность  $k$ ) имеет очень простую структуру: в нем все тройки имеют один общий элемент (например, 1). На самом деле, это не очень сложно обосновать, и мы предлагаем читателю самому проделать это и заодно из полученного результата вывести оценку  $4mn$ , за которую один из участников олимпиады получил спецприз.

Здесь же мы скажем несколько слов о том, насколько замечательны последствия упомянутых выше улучшений. Сама по себе четверка в оценке, разумеется, на итоговый результат никак не влияет. Зато знание структуры независимого множества позволяет значительно точнее оценивать количества слагаемых в суммах  $\Sigma_i$ . В итоге удается доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** *Выполнено соотношение*

$$P\left(\alpha(KG_{n,3,1/2}) \leq C_{n-1}^2\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 2 еще больше впечатляет, нежели теорема 1. Оказывается, с высокой вероятностью нет вообще никакого роста числа независимости – даже на единичку!

Имеет место общий структурный результат про независимые множества вершин в кнезеровских графах. Это теорема Хилтона–Милнера (1967 год).

**Теорема 3.** *Если  $r \leq n/2$  и независимое множество вершин кнезеровского графа  $KG_{n,r}$  имеет мощность, строго большую величины  $1 + C_{n-1}^{r-1} - C_{n-r-1}^{r-1}$ , то все вершины в этом множестве имеют один общий элемент.*

Теорему мы доказывать не станем, поясним лишь, откуда в ней появилось ограничение. Рассмотрим множество  $A = \{2, \dots, r+1\}$ , а также все  $r$ -элементные множества, содержащие элемент 1, кроме тех, которые не пересекаются с  $A$ . Понятно, что их количество равно в точности  $1 + C_{n-1}^{r-1} - C_{n-r-1}^{r-1}$ . Понятно также, что эти множества являются вершинами кнезеровского графа, причем они образуют в нем независимое множество и, более того, нет ни одного элемента, который бы одновременно принадлежал всем им. Таким образом, теорема 3 утверждает, что бóльших конструкций с указанными свойствами не бывает: едва мощность независимого множества становится больше, сразу возникает общий элемент и струк-

тура независимого множества устаканивается.

Отметим, что величина  $1 + C_{n-1}^{r-1} - C_{n-r-1}^{r-1}$  существенно меньше величины  $C_{n-1}^{r-1}$ : примерно в  $n$  раз по порядку! При  $r = 2$  это очевидно:

$$1 + C_{n-1}^1 - C_{n-3}^1 = 3.$$

При других  $r$  все устроено аналогично, т.е. старшие степени сокращаются.

В итоге удается доказать следующий общий результат.

**Теорема 4.** При  $r \geq 2$  выполнено соотношение

$$P(\alpha(KG_{n,r,1/2}) \leq C_{n-1}^{r-1}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Более того, можно  $1/2$  в теореме 4 заменить на  $1/3$  или даже на  $1/10000$ : ничего не изменится! В среднем сохранится одна сотая доля процента ребер, а число независимости не сдвинется ни на йоту.

Наконец, при  $r = 1$  кнезеровский граф является обычным полным графом. Разумеется, у него число независимости равно 1. Однако можно доказать, что у его случайного подграфа (вероятность ребра  $- 1/2$ ) число независимости с высокой вероятностью асимптотически равно  $2 \log_2 n$ . Получается, что случай  $r = 1$  крайне сильно отличается от случая  $r \geq 2$ . Такая вот удивительная картина.

## 6. Связь кнезеровского графа с геометрией

Вершины кнезеровского графа – это  $r$ -элементные подмножества множества  $\{1, \dots, n\}$ . Давайте каждой из них сопоставим вектор в  $n$ -мерном пространстве по простому правилу: если  $A$  – наша вершина и  $i \in A$ , то положим  $i$ -ю координату вектора равной 1, иначе – 0. Получится вектор с  $r$  единицами и  $n - r$  нулями. Известно, что расстояние между двумя точками

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

вычисляется по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Ясно, что если  $r \leq \frac{n}{2}$  и вершины  $A, B$  кнезеровского графа образуют ребро, то расстояние между соответствующими точками  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  равно  $\sqrt{2r}$ .

Напомним, что граф  $G$  называется *дистанционным в размерности  $n$* , если его вершины – точки в  $n$ -мерном пространстве, а ребра – пары точек, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние. В этих терминах кнезеровский граф является дистанционным.

Дистанционные графы играют очень важную роль в комбинаторике и комбинаторной геометрии. Например, с ними связана недавняя статья [4] в «Кванте». Более того, с ними связана замечательная задача Нелсона–Хадвигера о хроматическом числе пространства. А олимпиадная задача, которую мы упоминали в начале раздела 1, посвящена оценке числа ребер в дистанционных графах на плоскости. Таким вот неожиданным образом две мало похожие задачи оказываются связанными в рамках одной большой науки – комбинаторной геометрии.

### Список литературы

1. А.Райгородский, Л.Шабанов. Об одной «олимпиадной» задаче про графы расстояний. – «Квант» №3 за 2015 г.
2. А.Райгородский. Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. – «Квант» №1 за 2011 г.
3. А.Райгородский. Задачи о пересечениях множеств. – «Квант» №5–6 за 2016 г.
4. Р.Просанов. О различных расстояниях между точками на плоскости. – «Квант» №2 за 2016 г.
5. А.Райгородский, О.Рубанов, В.Кошелев. Хроматические числа. – «Квант» №3 за 2008 г.
6. А.Райгородский. Хроматические числа. 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2015.

# Космология Фрийдмана: горы реальные и потенциальные

С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ

## Динамика Вселенной

Теперь займемся зависимостью скорости расширения Вселенной от ее радиуса.

Сначала построим графики безразмерной функции безразмерного аргумента:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{-1 + \frac{\beta}{3} \left( \frac{2}{x} + x^2 \right)}.$$

Из рисунка 4 видно, что при  $\beta = 1$  в точке Эйнштейна  $x = 1$  скорость изменения радиуса мира нулевая, при  $\beta = 1,1$  скорость уже никогда не обращается в ноль, при  $\beta = 200$  скорость

также не меняет знака, принимая намного большие значения по сравнению с предыдущим случаем. Конечно, независимо от  $\beta$  минимум скорости всегда находится в точке Эйнштейна  $R = R_{\text{Э}}$ , т.е. при  $x = 1$ .

Затем построим графики для величины, которую назовем безразмерной постоянной Хаббла (из следующего раздела будет понятно, почему):

$$\tilde{H} = \frac{v}{cx} = \sqrt{-\frac{1}{x^2} + \frac{\beta}{3} \left( \frac{2}{x^3} + 1 \right)}.$$

Как видно из рисунка 5, минимум этой функции достигается при  $x = \beta$ , т.е. при  $R = R_g/\pi$ .

Как уже говорилось в первой части статьи, график потенциальной энер-

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.



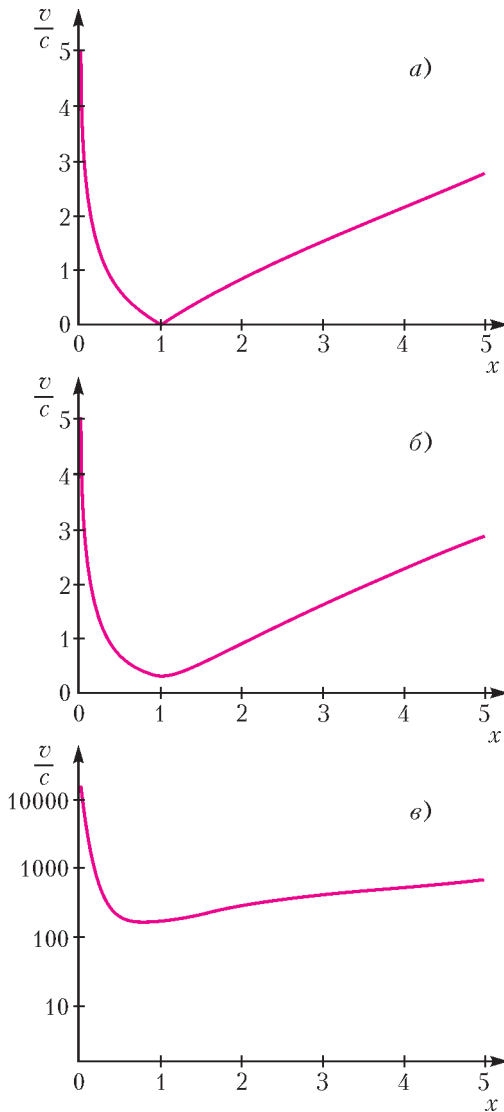


Рис. 4. Графики безразмерной скорости при  $\beta = 1$  (а),  $\beta = 1,1$  (б),  $\beta = 200$  (в)

гии Вселенной напоминает крутую горку, по которой можно скатиться в бездну и слева и справа. Скатывание с горки справа налево соответствует все ускоряющемуся сжатию Вселенной, вплоть до нулевого радиуса; скатывание слева направо соответствует ускоренному расширению Вселенной, стремящейся к бесконечному радиусу. Достижима ли при движении слева направо вершина горы? Если максимум

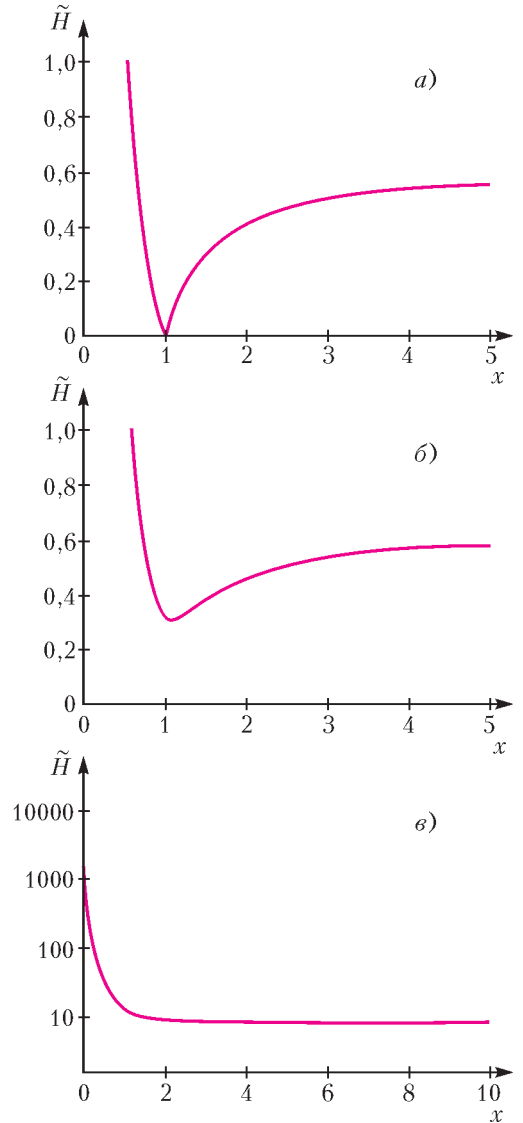


Рис. 5. Графики безразмерной постоянной Хаббла при  $\beta = 1$  (а),  $\beta = 1,1$  (б),  $\beta = 200$  (в)

потенциальной энергии лежит выше значения полной энергии, то вершина недостижима. Это значит, что брошенное тело упадет обратно, а Вселенная, начавшая в момент Большого взрыва расширяться с бесконечной скоростью, будет постепенно замедляться, замрет на мгновение и покатится, наращивая скорость, обратно к нулевому радиусу. Это происходит при  $0 < \beta < 1$ .



Пройдет ли Вселенная через эту точку и начнет ли расширяться снова, повторяя цикл за циклом? Фридман допускал такую возможность, вспоминая индусскую мифологию о периодах жизни. Интегрируя, он вычислил так называемый период мира; принимая предложенную английским астрономом Артуром Эддингтоном среднюю плотность вещества и считая космологическую постоянную нулевой, получил 10000000000 лет. Этот сценарий Фридман назвал «периодическим миром».

Можно, конечно, думать, что падение нашего пробного тела приведет к смерти Вселенной. Если точка Эйнштейна лежит ниже значения полной энергии, что происходит при  $\beta > 1$ , то брошенное тело улетит в бесконечность, а Вселенная, соответственно, начав расширяться с бесконечной скоростью, будет сначала постепенно уменьшать скорость расширения, но затем, перевалив через вершину горы, снова начнет ускоряться. Этот сценарий Фридман назвал «монотонным миром первого рода».

Наконец, «монотонный мир второго рода» соответствует картине, когда тело начинает движение с нулевой начальной скоростью с правого склона горы и скатывается по нему с ускорением. «Большого взрыва» и горячей ранней Вселенной в этом сценарии нет, поэтому он не согласуется с наблюдениями. Добавим, что в ОТО допустим не только мир положительной кривизны, но и миры с отрицательной и нулевой кривизной. В нашей механической задаче это означает, что полная энергия тела может быть равна  $mc^2/2$  или нулю. Оба эти случая гарантируют прохождение точки Эйнштейна и, значит, оставляют в силе только сценарий «монотонного мира первого рода».

Почему, обсуждая космологию, мы опираемся на Фридмана, а не на Эйнштейна, предложившего свое решение проблемы пятью годами раньше? Потому, что решение Эйнштейна было ошибочным. Оно описывало застывшую в точке – точке Эйнштейна – Вселенную, т.е. случай, когда наше пробное тело кто-то аккуратно поместил в ту самую точку, где силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга, иначе говоря, положил его на вершину потенциальной горы. Чтобы это вообще было возможно, надо еще и подогнать точку Эйнштейна под значение полной энергии, т.е. связать три числа: радиус мира  $R$ , космологическую постоянную  $\lambda$  и массу мира  $M$  двумя уравнениями. В нашем рассмотрении эти два уравнения выглядят так:

$$\beta = 1, \quad x = 1,$$

или

$$R_g = \pi R_\Sigma, \quad R = R_\Sigma.$$

Но каждый школьник знает, что положение на вершине является неустойчивым равновесием, а значит, рано или поздно тело покатится вниз.

Космологическую постоянную  $\lambda$ , т.е. силу всемирного отторжения, Эйнштейн ввел нарочно, изменив первоначальные уравнения ОТО ради того, чтобы получить для нас мир вечный и неизменный. Но все оказалось зря. Так интуиция иногда обманывает даже самые сильные умы. Не обманывает только математика! А космологическая постоянная спустя 80 лет все-таки пригодилась. В конце 1990-х годов было открыто ускоренное расширение Вселенной. Это значит, что точка Эйнштейна в ходе эволюции мира уже пройдена. Нам кажется, что случай Эйнштейна наглядно изображен на заставке к этой статье.

### Несколько чисел

Спустя три месяца после открытия уравнений динамики Вселенной Фридман выпускает для широкой публики книгу «Мир как пространство и время». Она начинается цитатой из Козьмы Пруткова, а заканчивается стихами Г.Р.Державина. В конце книги Фридман пишет:

«Теория Эйнштейна оправдывается на опыте; она объясняет старые, казавшиеся необъяснимыми явления и предвидит новые поразительные соотношения. Вернейший и наиболее глубокий способ изучения, при помощи теории Эйнштейна, геометрии мира и строения нашей Вселенной состоит в применении этой теории ко всему миру и в использовании астрономических исследований. Пока этот метод немного может дать нам... Но в этих обстоятельствах нельзя не видеть лишь затруднений временных; наши потомки, без сомнения, узнают характер Вселенной, в которой мы обречены жить...»

Теперь можно дополнить получившуюся картину современными оценками параметров эволюции Вселенной. При жизни Фридмана (он умер в 1925 г.) о них не было известно ничего. Сейчас у нас есть данные о постоянной Хаббла, о процентном отношении вкладов материи, включая невидимую нами темную материю, и о темной энергии, роль которой, возможно, играет космологическая постоянная.

Постоянная Хаббла  $H$  названа в честь американского астронома Эдвина Хаббла, работавшего на крупнейшем в то время оптическом телескопе в обсерватории Маунт-Вилсон. В 1929 году он обнаружил прямую пропорциональность скорости  $v$  убегания галактик расстоянию  $r$  до них:  $v = Hr$ . В наших обозначениях:  $H = R'/R$ . Современ-

ное значение постоянной Хаббла составляет  $H \approx 2,5 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$  (но чаще  $H$  выражают в км/с на мегапарсек, тогда  $H \approx 67 \text{ (км/с)}/\text{Мпк}$ ).

Темная энергия, которая, возможно, сводится к космологической постоянной, составляет примерно 70% полной плотности энергии. Вещество, включающее в себя и невидимую загадочную темную материю, дает примерно 30%. Есть еще излучение, плотность энергии которого убывает при расширении Вселенной как  $1/R^4$ , но его вкладом в первом приближении мы можем пренебречь. Вклад кривизны пространства не превышает 0,4%, поэтому пространство обычно предполагается плоским. Мы, однако, для наглядности сохраним за переменной  $R$  титул радиуса мира и будем считать пространство Вселенной трехмерной сферой, вслед за Эйнштейном и Фридманом (точнее, вслед первой работе Фридмана).

В нашей механической модели Вселенной соотношение между темной энергией и энергией вещества есть отношение потенциальных энергий

$$\frac{U_{\text{анти-Гук}}}{U_{\text{Ньютон}}} = \frac{m\omega^2 R/2}{\alpha GmM/R^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{R_g} \right)^3 = \frac{x^3}{2} \approx \frac{70\%}{30\%} \approx 2,3,$$

следовательно,  $x \approx \sqrt[3]{4,6} \approx 1,7$ .

Соотношение между вкладом кривизны (у нас в механической задаче это полная энергия) и вкладом вещества

$$\frac{|E|}{U_{\text{Ньютон}}} = \frac{1}{2\beta/(3x)} = \frac{3x}{2\beta} < 0,013$$

дает нам оценку  $\beta > 190$ . Для безразмерной постоянной Хаббла  $\tilde{H}$ , график зависимости которой от  $x$  мы строили при разных значениях  $\beta$  (см.

рис.5), получаем

$$\tilde{H} = \frac{v}{cx} = H \frac{R_{\text{Э}}}{c} \approx 0,77 \cdot 10^{-26} R_{\text{Э}},$$

если  $R_{\text{Э}}$  выражено в метрах. Из приведенной ранее формулы для  $\tilde{H}$  получаем

$$\tilde{H}(x = 1,7) \approx 0,68\sqrt{\beta} > 9,4,$$

следовательно,  $R_{\text{Э}} > 1,2 \cdot 10^{27}$  м, или в более адекватных единицах – мегапарсеках  $R_{\text{Э}} > 6 \cdot 10^4$  Мпк.

Таким образом, из данных о постоянной Хаббла мы можем получить оценку радиуса мира:  $R > 1,7R_{\text{Э}} \approx \approx 10^5$  Мпк, или  $R > 2 \cdot 10^{27}$  м. Для массы мира получаем  $M > 1,5 \cdot 10^{57}$  кг, для космологической постоянной Эйнштейна –  $\lambda = 3\omega^2 = 1,3 \cdot 10^{-35} \text{с}^{-2}$ , для гравитационного радиуса Вселенной –  $R_g > 3,6 \cdot 10^7$  Мпк.

### Рождение Вселенной из ничего?

«...является возможность также говорить о “сотворении мира из ничего”, но все это пока должно рассматривать как курьезные факты, не могущие быть солидно подтвержденными недостаточным астрономическим экспериментальным материалом...» – так говорится в упомянутой выше книге А.Фридмана.

В обеих наших моделях космологии было что-то искусственное. В примере с катанием на санях кто-то должен разогнать сани, во втором примере кто-то должен выстрелить из рогатки... Не следует ли представить все проще? Например, чтобы перевалить через одну горку, не лучше ли будет сначала забраться на горку более высокую и начать спуск оттуда? Тогда будет понятно, откуда взялись огромная кинетическая энергия и огромная по модулю, но отрицательная, потенциальная энергия. Причем начальная полная энергия может быть очень ма-

лой и даже нулевой. Вселенная может родиться... из ничего!

Приблизительно об этом говорит сценарий так называемой инфляции, когда Вселенная рождается как флуктуация вакуума и за первые  $10^{-30}$  с своего существования увеличивает свои размеры более чем в  $10^{30}$  раз. В этом сценарии вся огромная масса вещества Вселенной рождается при распаде первичного вакуума и переходе от эпохи инфляции к эпохе Фридмана. На рисунке 6 приведен примерный график

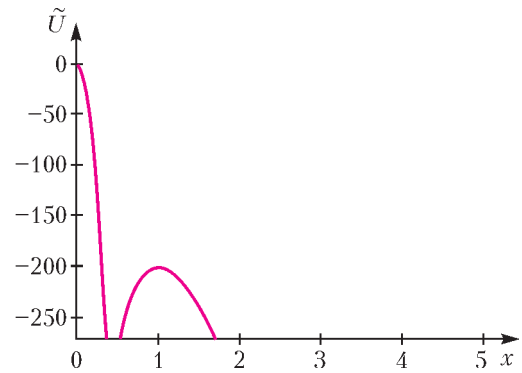


Рис. 6. График потенциальной энергии для сценария инфляции

зависимости безразмерной потенциальной энергии  $\tilde{U}$  от безразмерного радиуса Вселенной  $x$  для сценария инфляции.

### Эпилог

Так ли проста космология, как было представлено выше? Конечно, здесь сказано далеко не все. Вещество, которое Эйнштейн, за ним Фридман и мы с вами считали пылью, на самом деле включает в себя и излучение и ведет себя по-разному при разных плотностях и температурах. Мы не знаем доподленно, что происходит в мире элементарных частиц при энергиях на много порядков выше тех, которые доступны современным ускорителям.

(Окончание см. на с. 23)

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2451 – М2453 предлагались на XXXVIII Турнире городов. Задачи Ф2457–Ф2460 предлагались в 2016 году на Санкт-Петербургской городской открытой олимпиаде школьников по физике.

## Задачи М2450–М2453, Ф2457–Ф2460

**М2450.** Дан треугольник  $ABC$ . На луче  $AB$  отметили такую точку  $C_1$ , что  $AC_1 = AC$ , на луче  $BC$  – такую  $A_1$ , что  $BA_1 = BC$ , на луче  $CA$  – такую  $B_1$ , что  $CB_1 = CA$ ; на луче  $BA$  отметили такую точку  $C_2$ , что  $BC_2 = BC$ , на луче  $CB$  – такую  $A_2$ , что  $CA_2 = CA$ , на луче  $AC$  – такую  $B_2$ , что  $AB_2 = AB$  (рис.1). Докажите, что пло-

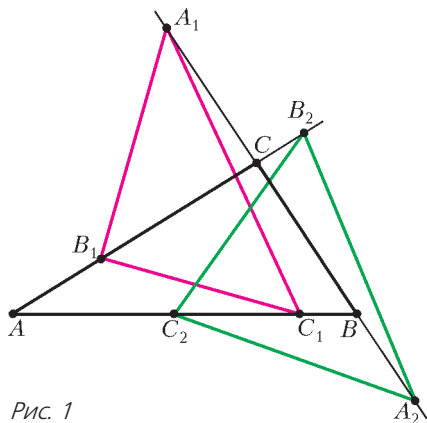


Рис. 1

щадь треугольника  $ABC$  равна полусумме площадей треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ .

*П. Кучерявый*

**М2451.** Петя нарисовал многоугольник площадью 100 клеток, проводя границы

по линиям квадратной сетки. Он проверил, что его можно разрезать по границам клеток и на 2 равных многоугольника, и на 25 равных многоугольников. Обязательно ли тогда его можно разрезать по границам клеток и на 50 равных многоугольников?

*Е. Бакаев*

**М2452.** Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на две части и покрыть ими какой-нибудь круг диаметра больше 1?

*А. Шаповалов*

**М2453.** На 2016 красных и 2016 синих карточках написаны положительные числа, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то 64 чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же 64 чисел. Всегда ли можно определить, на карточках какого цвета написаны попарные суммы?

*Б. Френкин*

**Ф2457.** У танкера, перевозящего топливо, закончилось горючее, когда до порта осталось  $L = 100$  км. Чтобы доплыть до пункта назначения, капитан решил использовать груз в качестве топлива для танкера. Какое наименьшее количество тонн топлива придется потратить, чтобы добраться до порта по прямой? Скорость танкера зави-



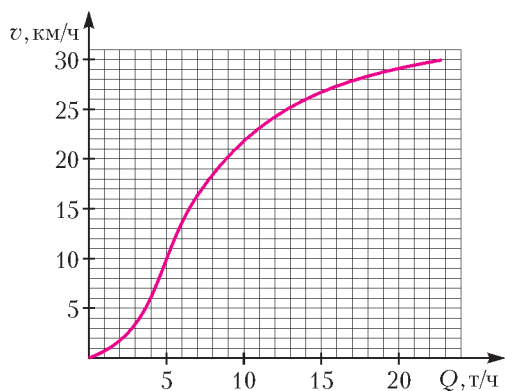


Рис. 2

сит от расхода топлива  $Q$  так, как показано на рисунке 2.

*И.Буренев*

**Ф2458.** Два робота движутся по круговым траекториям вокруг общего центра с постоянными по модулю скоростями, радиус траектории первого  $R$ , второго  $\sqrt{2}R$  (рис.3). В начальный момент времени первый робот измерил расстояние до второго, оно оказалось равным  $R$ . Сделав половину оборота, первый робот снова измерил расстояние до второго. Оно стало равным  $\sqrt{3}R$ . Какое время

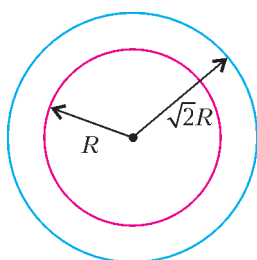


Рис. 3

нужно второму роботу, чтобы сделать один полный оборот вокруг центра? Известно, что первый робот делает оборот за  $T = 210$  с, а второй не может совершить оборот быстрее чем за  $t_m = 100$  с.

*А.Горбенко*

**Ф2459.** Лыдина массой  $M$  покоится на гладкой горизонтальной ледяной поверхности (рис.4; вид сбоку). Угол наклона  $ВАС$  равен  $\alpha$ ,  $BC = H$ . По наклонной плоскости от точки  $A$  к точке  $B$  начинает подниматься с постоянной относительно лыдины скоростью  $v$  пингвин массой  $m$ . Пройдя треть пути до вершины, пингвин спотыкается и падает животом на лыдину. При этом сразу после падения его скорость

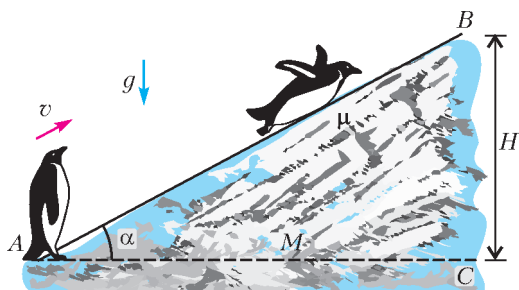


Рис. 4

относительно лыдины оставалась равной  $v$ . Какова конечная скорость лыдины, если коэффициент трения между животом пингвина и поверхностью лыдины  $\mu$ ? До начала движения пингвин неподвижно стоял в точке  $A$  на покоящейся лыдине. Трением лыдины о горизонтальную поверхность пренебречь.

*А.Мальшев*

**Ф2460.** К источнику постоянного напряжения подключена схема из шести резисторов (рис.5). Сопротивления резисторов

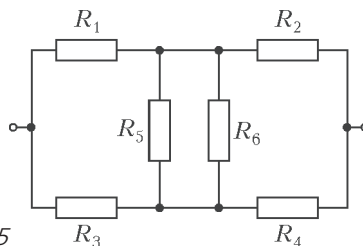


Рис. 5

$R_1 = R_4 = 2$  Ом,  $R_2 = R_3 = 3$  Ом,  $R_5 = R_6 = 5$  Ом. Известно, что два резистора вышли из строя (какие именно – не известно): одно из сопротивлений закоротило, а другое – перегорело. Какие два резистора должны выйти из строя, чтобы у получившейся схемы было минимально возможное сопротивление? А чтобы сопротивление оставшейся схемы получилось максимальным? Рассчитайте сопротивления получившейся схемы в этих двух случаях. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

*И.Александров*

### Решения задач M2436–M2440, Ф2443–Ф2447

**M2436.** Найдите все натуральные  $n$  со следующим свойством: существуют  $n$  последовательных натуральных чисел, сумма которых является квадратом целого числа.

**Ответ:**  $n = 2^s m$ , где  $m$  – любое нечетное целое, а  $s$  либо равно 0, либо нечетно.

Обозначим

$$S(n, t) = (t+1) + (t+2) + \dots + (t+n) = \\ = (2t+n+1)n/2.$$

Для нечетного  $n$  положим  $t = (n-1)/2$  и получим  $S(n, t) = n^2$ .

Пусть теперь  $n$  четно, т.е.  $n = 2^s m$ , где  $s$  натуральное, а  $m$  нечетное. Поскольку  $2t+n+1$  нечетно,  $S(n, t)$  делится на  $2^{s-1}$ , но не делится на  $2^s$ . Это означает, что для четного  $s$  степень вхождения двойки в разложение числа  $S(n, t)$  нечетна, значит,  $S(n, t)$  не является точным квадратом.

Для нечетного  $s$  можно положить  $t = (mx^2 - n - 1)/2$  для некоторого достаточно большого нечетного  $x$  (такого, чтобы  $t$  было положительным). Тогда  $S(n, t) = 2^{s-1} m^2 x^2$  – точный квадрат.

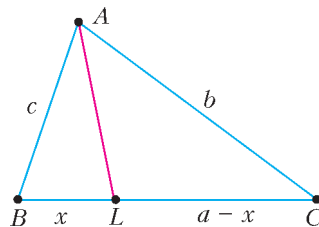
П. Кожевников

**M2437.** Точка  $L$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $AL$  является биссектрисой угла  $BAC$  тогда и только тогда, когда выполнено равенство  $(AB+BL)(AC-CL) = AL^2$ .

Вначале предположим, что  $AL$  – биссектриса. Тогда по известной формуле  $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$ . Кроме того, по свойству биссектрисы  $AB : AC = BL : CL$ , откуда  $AB \cdot CL = AC \cdot BL$ . Имеем

$$(AB+BL)(AC-CL) = \\ = (AB \cdot AC - BL \cdot CL) + \\ + (BL \cdot AC - AB \cdot CL) = AL^2.$$

Для доказательства обратного утверждения обозначаем  $BL = x$  (см. рисунок) и по теореме косинусов (используя стандарт-



ные обозначения  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ) имеем  $AL^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \angle B$ . Поскольку

$$(AB+BL)(AC-CL) = (c+x)(b-a+x),$$

то после раскрытия скобок и приведения подобных в данном равенстве  $(AB+BL)(AC-CL) = AL^2$  уничтожится  $x^2$ ; тем самым, получим линейное уравнение относительно  $x$ . Оно не является тождеством для всех  $x$ : скажем, при  $x = 0$  имеем

$$(AB+BL)(AC-CL) = c(b-a) \neq c^2 = AL^2.$$

Значит, это линейное уравнение имеет не более одного корня, а один его корень нам уже известен: он соответствует случаю, когда  $L$  – основание биссектрисы.

А. Плахов, А. Спивак

**M2438.** Многочлен  $y_0$  степени  $n$  имеет  $n$  различных корней  $x_1, \dots, x_n$ . Вместе с  $y_0$  рассмотрим многочлены, получающиеся из него циклической перестановкой коэффициентов:

$$y_0 = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \\ y_1 = a_1 x^n + \dots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_0, \\ \dots, \\ y_n = a_n x^n + a_0 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Положим  $b_i = y_i(x_1)$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Докажите, что если  $b_1 \neq 0$ , то многочлен  $g = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n$  имеет корни  $x_2, \dots, x_n$ .

Пусть  $h = (x - x_1)g$ . Достаточно доказать, что многочлен  $h$  имеет корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , т.е. многочлен  $h$  получается из  $y_0$  домножением на некоторую постоянную.

Имеем

$$h = b_1 x^n + (b_2 - b_1 x_1) x^{n-1} + \\ + (b_3 - b_2 x_1) x^{n-2} + \dots + (b_n - b_{n-1} x_1) x - b_n x_1.$$

Выразим коэффициенты многочлена  $h$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1x_1^n + \dots + a_nx_1 + a_0 = \\ &= a_0x_1^{n+1} + (a_1x_1^n + \dots + a_nx_1 + a_0) - a_0x_1^{n+1} = \\ &= (a_0x_1^{n+1} + a_1x_1^n + \dots + a_nx_1) + a_0 - a_0x_1^{n+1} = \\ &= x_1y_0(x_1) + a_0(1 - x_1^{n+1}) = a_0(1 - x_1^{n+1}). \end{aligned}$$

При  $1 \leq k \leq n - 1$ :

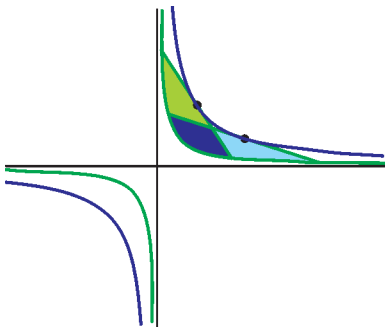
$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_kx_1 &= \\ &= (a_{k+1}x_1^n + \dots + a_nx_1^{n-k+1} + a_0x_1^{n-k} + \dots + a_k) - \\ &\quad - (a_kx_1^{n+1} + a_{k+1}x_1^n + \dots + a_nx_1^{n-k+1} + \\ &\quad + a_0x_1^{n-k} + \dots + a_{k-1}x) = a_k(1 - x_1^{n+1}); \\ -b_nx_1 &= -a_nx_1^{n+1} - (a_0x_1^n + \dots + a_{n-1}x_1) = \\ &= -a_nx_1^{n+1} + a_n - (a_0x_1^n + \dots + a_{n-1}x_1 + a_n) = \\ &= a_n(1 - x_1^{n+1}) + y_0(x_1) = a_n(1 - x_1^{n+1}). \end{aligned}$$

Как видим, коэффициенты многочлена  $h$  получаются из соответствующих коэффициентов многочлена  $y_0$  умножением на  $(1 - x_1^{n+1})$ .

*Замечание.* Утверждение задачи может быть переформулировано с помощью теоремы Виета следующим образом: сумма произведений чисел из множества  $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , взятых в количестве  $k$ , равна  $(-1)^k \frac{b_k}{b_1}$ .

В.Каражаев, П.Кожевников

**M2439.** Даны две гиперболы  $xy = a$  и  $xy = b$ , где  $a < b$  – положительные числа. В каждой точке второй гиперболы проведем касательную, она отсечет от первой



гиперболы «сегмент» (см. рисунок). Докажите, что площади всех таких «сегментов» равны.

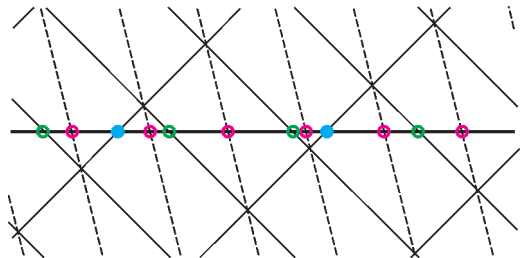
Решение см. в статье С. Дворянинова, П. Кожевникова «Какие бывают повороты».

**M2440.** Правильный  $p$ -угольник  $P$  и правильный  $q$ -угольник  $Q$ , не имеющие общих вершин, вписаны в одну и ту же окружность. Окружность разбита  $p + q$  вершинами многоугольников  $P$  и  $Q$  на  $p + q$  дуг. Всегда ли можно вписать в окружность правильный  $(p + q)$ -угольник так, чтобы на каждой из дуг оказалась ровно одна из его вершин?

**Ответ:** да, всегда.

Покрасим вершины  $p$ -угольника зеленым, а вершины  $q$ -угольника – синим. Прокатим нашу окружность по прямой (эту прямую примем за ось координат  $Ox$ ) так, что вершины  $p$ -угольника оставят на оси  $Ox$  зеленые «отпечатки» через равные промежутки. Аналогично получим синие отпечатки от вершин  $q$ -угольника. Если  $l$  – длина окружности, то множества зеленых и синих точек на прямой переходят в себя при сдвиге на  $l$  по горизонтали.

Далее, через каждую синюю точку проведем прямую с угловым коэффициентом 1, а через каждую зеленую точку – прямую с угловым коэффициентом  $-1$  (см. рисунок), получилась сетка из прямоугольников. В каждом прямоугольнике проведем



пунктиром диагональ, соединяющую вершины с наибольшей и наименьшей ординатой. Покрасим красным точки пересечения пунктирных линий с осью  $Ox$ .

Пунктирные диагонали образуют парал-

лельные прямые, такие, что расстояние между соседними прямыми одно и то же. Вся конфигурация переходит в себя при сдвиге на  $l$  по горизонтали. Значит, красные точки расположены через равные промежутки на оси  $Ox$  и множество красных точек переходит в себя при сдвиге на  $l$  по горизонтали. Если теперь повторить прокатывание окружности, на ней остаются отпечатки от красных точек – это вершины правильного многоугольника.

Для решения задачи достаточно показать, что каждый из отрезков, на которые зеленые и синие точки делят ось  $Ox$ , содержит ровно одну красную точку. Пусть  $s$  – один из таких отрезков. Так как отрезок  $s$  содержится в некотором прямоугольнике  $r$ , он может быть пересечен лишь одной пунктирной диагональю. С другой стороны, отрезок  $s$  в самом деле пересечен диагональю прямоугольника  $r$ . Действительно, если концы отрезка  $s$  окрашены в один и тот же цвет, то ось  $Ox$  пересекает две противоположные стороны прямоугольника  $r$ , а значит, и его диагональ; если же концы отрезка  $s$  окрашены в разные цвета, то ось  $Ox$  отделяет самую верхнюю (или самую нижнюю) вершину прямоугольника  $r$  от трех других его вершин, значит, и в этом случае ось  $Ox$  пересечена пунктирной диагональю прямоугольника  $r$ .

*Замечание.* Задача М2440 связана с классической задачей, предлагавшейся на Всесоюзной математической олимпиаде 1979 года (фактически, обобщает ее):

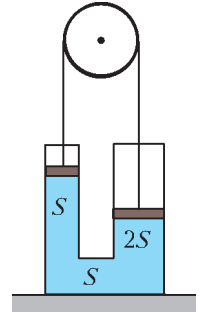
Пусть  $p$  и  $q$  – два взаимно простых натуральных числа. Отрезок  $[0; 1]$  разбит на  $p + q$  равных отрезков. Докажите, что каждый из этих отрезков, за исключением самого левого и самого правого, содержит ровно одно число из  $p + q - 2$  чисел

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}.$$

Н.Белухов

**Ф2443.** Вертикальные сообщающиеся сосуды с площадями сечения  $S$  и  $2S$  соединены горизонтальным каналом площадью сечения  $S$  (см. рисунок).

Сосуды перекрыты невесомыми подвижными поршнями, а весь объем под поршнями заполнен несжимаемой жидкостью. К поршням прикреплена крепкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок. Ось блока начинают перемещать



вверх с постоянной скоростью  $v$ . С какой средней скоростью начинает двигаться жидкость в горизонтальном канале? Сами сосуды неподвижны, а поршни от жидкости не отрываются.

Так как объем жидкости постоянен, искомая величина скорости  $v_x$  движения жидкости в горизонтальном канале равна скорости  $v_1$  движения в сосуде того же сечения  $S$ . По этой же причине величина скорости  $v_2$  движения поршня в сосуде сечением  $2S$  равна половине от величины  $v_1$ , т.е.  $v_2 = v_1/2$ . Вследствие сохранения объема жидкости, один из поршней движется вниз (большой), а другой (меньший) – вверх. За некоторый промежуток времени  $\Delta t$  ось блока переместится на расстояние  $v\Delta t$ , а смещения поршней составят  $v_1\Delta t$  и  $-v_2\Delta t$ . Знак «минус» добавлен для того, чтобы учесть, что этот поршень движется вниз, как и правый конец нити. Поскольку нить не изменяет своей длины, эти смещения связаны соотношением

$$2v\Delta t = v_1\Delta t - v_2\Delta t,$$

откуда получаем

$$v_1 = 4v.$$

Таким образом, скорость жидкости в горизонтальном канале направлена (по рисунку) влево и равна  $v_x = 4v$ .

В.Боровков

**Ф2444.** На идеально скользком льду лежат, соприкасаясь, две одинаковые доски





(см. рисунок).

На левый край первой доски поставлен шероховатый брусок. Когда его толкнули, он достиг правого края второй доски и остался на нем. Во сколько раз приобретенная второй доской скорость больше, чем у первой? Масса и размер бруска много меньше массы и длины досок.

Ввиду малой массы бруска, ускорение и скорости досок много меньше ускорения и скорости бруска. Поэтому движение бруска можно рассматривать, не учитывая движение досок.

Пусть длина одной доски  $L$ , начальная скорость бруска  $v$ , ускорение бруска  $a = \mu g$ , а времена движения бруска по первой и второй доске  $t_1$  и  $t_2$  соответственно. Тогда

$$vt_1 - \frac{at_1^2}{2} = L,$$

$$v(t_1 + t_2) - \frac{a(t_1 + t_2)^2}{2} = 2L,$$

$$v - a(t_1 + t_2) = 0,$$

откуда получаем

$$t_1 = t_2(\sqrt{2} - 1).$$

Пусть масса одной доски  $M$ . Сила трения  $\mu mg$ , действующая на доски со стороны бруска массой  $m$ , приводит к ускорению  $a_1 = \mu mg / (2M)$  при движении бруска по первой доске, когда обе доски движутся вместе, и к ускорению второй доски  $a_2 = \mu mg / M = 2a_1$  при движении бруска по второй доске, когда первая отстает от второй и движется с достигнутой за время  $t_1$  скоростью.

Выразим искомые скорости:

$$v_1 = a_1 t_1, \quad v_2 = v_1 + a_2 t_2.$$

Отсюда находим

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{t_1 + 2t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 5,82 \approx 6.$$

В. Баткин

**Ф2445.** Масса платформы с ракетными двигателями (рис. 1) равна  $m$ . Сила тяги

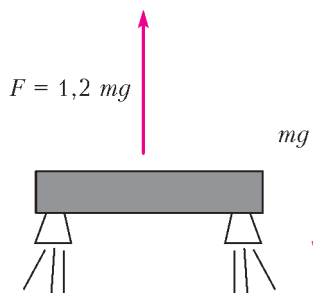


Рис. 1

двигателей, равная  $F = 1,2mg$ , направлена вверх ( $g$  – ускорение свободного падения). Двигатели периодически включают на некоторое время  $T$  и выключают на время  $\tau = 0,2$  с. При этом платформа, поднимаясь и опускаясь, остается в среднем на неизменной высоте. Каково тогда  $T$ ? На какую высоту  $h$  поднимается платформа от низшего положения до высшего?

Ускорение платформы при включенном двигателе равно

$$a = \frac{F - mg}{m} = 0,2g.$$

Установим зависимость скорости от времени за промежуток  $T + \tau$ . На интервале  $T$  приращение скорости пропорционально времени, а коэффициент пропорциональности равен  $a$ . Аналогично и для участка интервала  $\tau$ , только здесь приращение скорости отрицательно, а вместо  $a$  надо взять  $g$ . За промежуток  $T + \tau$  полное приращение скорости будет равно

$$\Delta v = aT - g\tau.$$

При положительном  $\Delta v$  скорость в среднем растет, при отрицательном убывает, по условию же в среднем скорость постоянна. Таким образом,

$$\Delta v = aT - g\tau = 0, \text{ и } T = \frac{g\tau}{a} = 1 \text{ с.}$$

На рисунке 2 приведен соответствующий

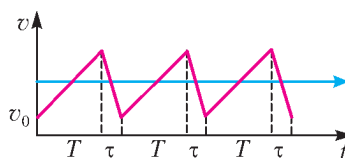


Рис. 2

график скорости, а верхняя горизонтальная ось отвечает нулевой средней скорости. Условие  $\Delta v = 0$  еще не означает, что средняя скорость по вертикали нулевая. Для этого требуется, чтобы перемещение за цикл было нулевым. Отсюда получаем уравнение для начальной скорости  $v_0$ :

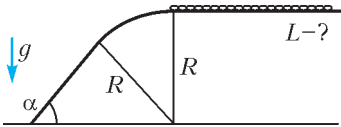
$$v_0(T + \tau) + \frac{aT^2}{2} + \frac{g\tau^2}{2} = 0, \text{ и } v_0 = -\frac{aT}{2}.$$

Теперь можно сделать вывод, что низшее и высшее положения проходятся в средние моменты промежутков времени  $T$  и  $\tau$ , где скорость платформы нулевая. А тогда для высоты  $h$  подъема платформы получаем

$$h = \frac{aT^2}{8} + \frac{g\tau^2}{8} = \frac{3g\tau^2}{4} = 30 \text{ см}.$$

И.Воробьев

**Ф2446.** Стол сопряжен цилиндрической поверхностью радиусом  $R$  с наклонной плоскостью с углом наклона  $\alpha$  (см. рисунок). Первоначально покоящаяся цепочка



начинает соскальзывать со стола. При какой длине цепочки  $L$  ее «хвост» не оторвется от поверхности? Трения нет.

Критический момент наступает тогда, когда последнее звено цепочки проходит нижнюю точку цилиндрической поверхности, а вся остальная цепочка находится на наклонной плоскости. В момент отрыва сила нормального давления, а значит, и сила реакции опоры обращаются в ноль. Из второго закона Ньютона находим центростремительное ускорение:

$$a_{ц} = \frac{v^2}{R} = g \cos \alpha,$$

где  $v$  – скорость цепочки. Эту скорость, точнее ее квадрат, можно выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgH,$$

где

$$H = R(1 - \cos \alpha) + \frac{L}{2} \sin \alpha$$

– уменьшение высоты центра масс цепочки.

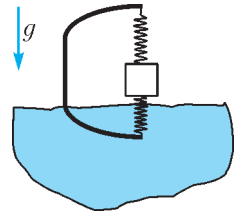
После подстановки получаем, что наибольшая длина цепочки равна

$$L = \frac{R(3 \cos \alpha - 2)}{\sin \alpha}.$$

При  $\cos \alpha < 2/3$  цепочка любой длины оторвется от поверхности.

А.Киприянов

**Ф2447.** С помощью С-образной скобы между двумя одинаковыми вертикальными пружинами зажат кубик с длиной ребра  $a = 10$  см (см. рисунок). Сохраняя вертикальность пружин, скобу опускают в широкий сосуд с водой. Оказалось, что, считая от момента касания кубиком воды до его полного погружения в воду, сама скоба переместилась на  $h = 15$  см по вертикали. Найдите жесткость  $k$  одной пружины. Считать вес 1 кг равным 10 Н, собственным объемом пружин пренебречь.



Согласно условию задачи, при погружении кубика в воду его смещение относительно скобы составило  $\Delta x = h - a = 5$  см. На столько же изменила свою деформацию и каждая из пружин: одна увеличила, а другая уменьшила. Это означает, что равнодействующая сил упругости, действующих на погруженный в воду кубик, изменилась на  $2k\Delta x$ . Причиной тому – выталкивающая сила  $F$ , равная весу воды в объеме кубика  $a^3 = 10^3$  см<sup>3</sup>, т.е., с хорошей точностью,  $F = 10$  Н. Таким образом,

$$F = 2k\Delta x,$$

откуда находим

$$k = \frac{F}{2\Delta x} = 100 \text{ Н/м}.$$

В.Боровков

### Какие бывают повороты

С.Дворянинов, П.Кожевников

Одна из целей этой заметки – решение следующей задачи о гиперболах.

**М2439.** Даны две гиперболы  $xy = a$  и  $xy = b$ , где  $a < b$  – положительные числа. В каждой точке второй гиперболы проведем

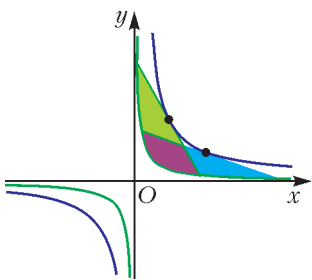


Рис. 1

касательную, она отсечет от первой гиперболы «сегмент» (рис.1). Докажите, что площади всех таких «сегментов» равны.

Иными словами, в задаче утверждается, что гипербола  $xy = b$  – это огибающая хорд, отсекающих от гиперболы  $xy = a$  равновеликие сегменты.

Гипербола – кривая из класса коник, т.е. кривых, задаваемых алгебраическим уравнением второй степени. Разные коники (гипербола, парабола, эллипс) внешне непохожи, но имеют схожие уравнения (этакое алгебраическое родство), а поэтому зачастую разные коники все же обладают аналогичными геометрическими свойствами.

Поэтому, прежде чем решать задачу про две гиперболы, рассмотрим более простой вариант коник – окружности.

**Задача об окружностях.** Пусть имеются две концентрические окружности. В каждой

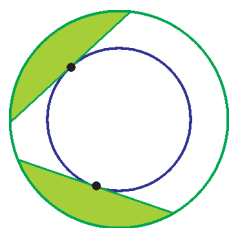


Рис. 2

точке внутренней окружности проведем касательную, она отсечет от внешней окружности сегмент (рис. 2). Докажите, что площади всех таких сегментов равны.

Смотрим на отсекаемые сегменты – никаких сомнений: все они равновелики, ведь один сегмент можно перевести в другой поворотом вокруг центра окружностей.

На самом деле в этом решении «в одну

строчку» можно выделить несколько ключевых моментов:

- (1) повороты вокруг центра сохраняют каждую из окружностей;
- (2) при повороте сохраняется площадь фигуры;
- (3) касательная (т.е. прямая, касающаяся окружности) переходит в касательную.

**Упражнение 1.** Сформулируйте и решите аналогичную задачу об эллипсах.

*Указание.* Эллипсы должны быть гомотетичны и иметь общий центр. Можно выполнить сжатие к прямой, переводящее эллипс в окружность.

К сожалению, повороты для гипербол не помогут... Но может быть, найдутся другие преобразования, которые помогут нам столь же эффективно и коротко решить задачу о гиперболах? И действительно, есть подходящие преобразования, именуемые *гиперболическими поворотами*, они из класса так называемых *аффинных преобразований* (о таких преобразованиях в «Кванте» уже шла речь – см. статью А.Заславского «Аффинная геометрия» в «Кванте» №1 за 2009 г.).

Нужные нам гиперболические повороты можно ввести при помощи более известных в школе сжатий и растяжений. Для некоторого  $k > 0$  выполним вначале сжатие вдоль оси  $Ox$  в  $k$  раз (здесь полагаем, что возможно и  $0 < k \leq 1$ , считая сжатие в  $k$  раз растяжением в  $1/k$  раз), а затем растяжение вдоль оси  $Oy$  в  $k$  раз. Результирующее преобразование и будет гиперболическим поворотом. Точка  $(x; y)$  после первого сжатия перешла в точку  $(x/k; y)$ , а затем в точку  $(x/k; ky)$ . Таким образом, результат гиперболического поворота записывается в координатах так:  $(x; y) \rightarrow (x^*; y^*)$ , где  $x^* = x/k$ ,  $y^* = ky$ . Легко видеть, что точка, лежащая на гиперболе  $xy = c$ , переходит в точку, лежащую на той же гиперболе<sup>1</sup>:

$$x^*y^* = (x/k) \cdot ky = xy = c$$

– ключевой момент (1) есть!

<sup>1</sup> Интересно рассмотреть семейство гиперболических поворотов, меняя непрерывно параметр  $k$ . Можно усмотреть «поток», который, подобно потоку воды, несет каждую точку первого квадранта вдоль соответствующей ветви гиперболы.

**Упражнение 2.** Докажите, что для любых двух точек  $A$  и  $B$ , лежащих на одной ветви гиперболы  $xy = c$ , можно подобрать параметр  $k$  гиперболического поворота так, чтобы  $A$  переходила в  $B$ .

Теперь посмотрим, что происходит с площадью фигур. При первом сжатии площадь любой фигуры умножается на  $1/k$ , при последующем растяжении умножается на  $k$ , в итоге площадь умножается на  $(1/k) \cdot k = 1$ , т.е. не изменяется – ключевой момент (2)!

Любая прямая при сжатии и растяжении переходит в прямую, значит, и при гиперболическом повороте – тоже. Факт касания прямой и кривой тоже сохраняется при сжатиях, а значит, и при гиперболическом повороте. Поэтому касательная к гиперболе  $xy = b$  перейдет при гиперболическом повороте в касательную к той же гиперболе – ключевой момент (3)!

Подготовка завершена. А теперь короткое **решение задачи о гиперболах**.

Пусть касательные  $l_p$  и  $l_q$ , проведенные в точках  $P$  и  $Q$  гиперболы  $xy = b$ , отсекают от гиперболы  $xy = a$  сегменты  $S_p$  и  $S_q$ . В силу симметрии гиперболы достаточно считать, что точки  $P$  и  $Q$  располагаются на одной ветви. Рассмотрим гиперболический поворот, сохраняющий наши гиперболы и переводящий  $P$  в  $Q$  (используем упражнение 2). Тогда прямая  $l_p$  перейдет в прямую  $l_q$ , и область  $S_p$ , заключенная между прямой  $l_p$  и гиперболой  $xy = a$ , переходит в область  $S_q$  (попробуйте объяснить это аккуратно; строго говоря, до этого сказано только о границах области  $S_p$ ). Остается воспользоваться сохранением площадей – и задача о гиперболах решена!

**Упражнение 3.** Докажите, что точка касания  $P$  на рисунке 3 – середина отрезка между точками

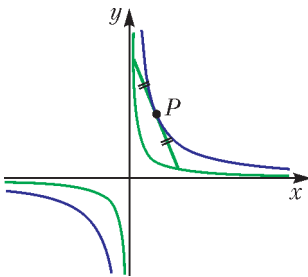


Рис. 3

пересечения прямой  $l_p$  с гиперболой  $xy = a$ .

*Указание.* Аффинное преобразование (в частности, гиперболический поворот) отрезок переводит в отрезок, причем середина отрезка переходит в середину. Кроме того, есть

положение точки  $P$ , для которого утверждение этого упражнения очевидно.

Итак, для эллипсов и гипербол задача о равновеликих сегментах решена. Оказывается, есть аналогичное утверждение и для парабол, только надо брать равные параболы, которые получаются друг из друга параллельным переносом.

**Задача о параболах.** Даны две параболы  $y = x^2$  и  $y = x^2 + a$ , где  $a > 0$ . В каждой точке внутренней параболы проведем касательную, она образует с внешней параболой сегмент (рис. 4). Докажите, что площади всех таких сегментов равны.

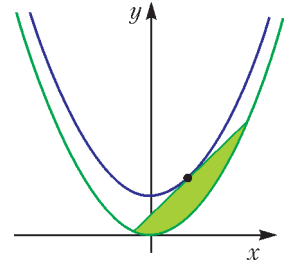


Рис. 4

Как читатель, возможно, уже догадался, нам помогут *параболические повороты*! Подходящие повороты определяются как  $(x; y) \rightarrow (x^*; y^*)$ , где  $x^* = x + k$ ,  $y^* = 2kx + y + k^2$ , а  $k$  – действительный параметр.

**Упражнение 4.** Докажите, что

$$y^* - x^{*2} = y - x^2.$$

Равенство в упражнении 4 означает, что определенные выше параболические повороты сохраняют каждую параболу вида  $y = x^2 + c$  (ключевой момент (1)).

Параболический поворот является аффинным преобразованием, что на самом деле сразу влечет ключевой момент (3). Конечно, желающие могут убедиться и непосредственно, что касательная к параболе  $y = x^2 + c$  переходит в касательную к той же параболе.

Осталось понять, что сохраняется площадь (ключевой момент (2)). Знакомые с основами теории аффинных преобразований знают ответ<sup>2</sup> из координатной записи, но доказательство выходит за рамки этой

<sup>2</sup> Ответ такой: при аффинном преобразовании, заданном формулами  $x^* = a_1x + b_1y + c_1$ ,  $y^* = a_2x + b_2y + c_2$ , площадь фигуры умножается на  $|a_1b_2 - a_2b_1|$ . В нашем случае  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $a_2 = 2k$ ,  $b_2 = 1$ .

статьи. Мы же приведем следующее геометрическое рассуждение, из которого можно вывести сохранение площади.

Рассмотрим криволинейную трапецию – «чешуйку» ширины  $t$ , ограниченную вертикальными прямыми, находящимися на расстоянии  $t$  друг от друга, и параболами  $y = x^2 + b$ ,  $y = x^2 + b + s$ , где  $s > 0$  (рис.5).

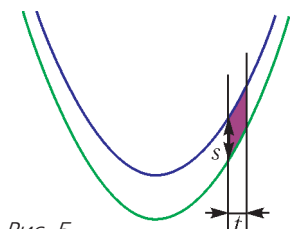


Рис. 5

Тогда площадь чешуйки равна  $ts$ .

**Упражнение 5.**  
Докажите это.

*Указание.* Разрежьте горизонталями чешуйку на части, переложив которые можно получить прямоугольник  $t \times s$ .

При параболическом повороте любая вертикальная прямая сдвигается на  $k$  по горизонтали, значит, наша чешуйка перейдет в новую чешуйку той же ширины  $t$ , зажатую между теми же параболами. Как видим, площадь новой чешуйки тоже равна  $ts$ . Итак, площади чешуек, зажатых между вертикальными прямыми и параболами вида  $y = x^2 + c$ , сохраняются. Можно создать мелкую «криволинейную» сетку из таких чешуек (рис.6) и приближать заданную

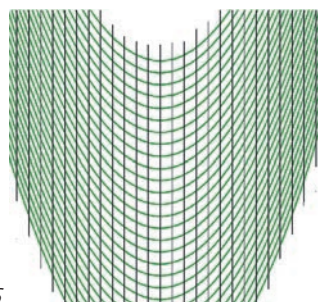


Рис. 6

фигуру набором чешуек (подобно тому, как при определении площадей сложных фигур фигура приближается набором ячеек мелкой квадратной сетки) – и вывести из сохранения площадей для чешуек сохранение площадей для любых фигур.

Итак, все три ключевых момента для решения готовы, теперь дело за малым.

**Упражнения**

- 6. Сформулируйте аналог упражнения 2, докажете его и завершите решение задачи о параболах.
- 7. Сформулируйте и докажете факт про середину отрезка, аналогичный упражнению 3.

В завершение предлагаем читателю придумать аналогичные пространственные задачи об эллипсоидах, гиперboloидах, параболоидах и объемах, отсекаемых касательными плоскостями.

(Начало см. на с. 9)

В ранней Вселенной имели место грандиозные фазовые переходы, распад вакуума и рождение из него новых и новых частиц. Эволюция Вселенной является неравновесным и необратимым процессом.

Первым физиком, всерьез обратившим на это внимание, был Георгий Гамов, которому, вместе с учениками, удалось вывести соотношение между количествами легких элементов системы Менделеева во Вселенной, предсказать существование реликтового излучения и правильно оценить его температуру.

Но это отдельная история...

**Литература**

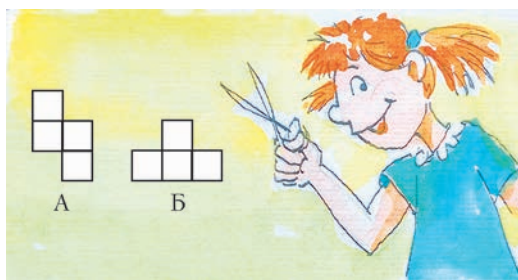
1. Письма и рукописи А.Фридмана в архиве П.Эренфеста ([www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Friedmann\\_archive/](http://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Friedmann_archive/))
2. А.А.Фридман. Мир как пространство и время (5-е изд.) (М.: Либроком, 2009)
3. Номер журнала «Успехи физических наук», посвященный 75-летию Фридмана (т.80, в.3, 1963)
4. Э.А.Тропп, В.Я.Френкель, А.Д.Чернин. Александр Александрович Фридман: Жизнь и деятельность (2-е изд.) (М.: КомКнига, 2006)
5. А.Беленький. «Воды, в которые я вступаю, не пересекал еще никто». Александр Фридман и истоки современной космологии (электронный журнал «Наука из первых рук», № 5(47), 2012)
6. В.О.Соловьев. Как Фридман Эйнштейна подковал (журнал «Наукоград», №4(6), 2015)
7. М.В.Сажин. Современная космология в популярном изложении (М.: УРСС, 2002)
8. А.Д.Долгов. Космология: от Померанчука до наших дней (УФН, т.184, 2014)



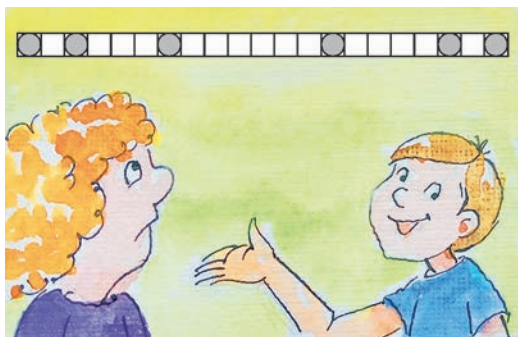
## Задачи

1. Нарисуйте на клетчатой бумаге фигуру, которую можно разрезать как на фигуры вида А, так и на фигуры вида Б (см. рисунок).

*Фольклор*



2. На полоске из 21 клетки стоят несколько фишек, как на рисунке. Од-



ним действием разрешается выбрать любые три подряд идущие фишки А, Б, В и переложить среднюю фишку Б так, чтобы между Б и В стало столько клеток, сколько было между А и Б, но при этом порядок фишек не менялся. Можно ли с помощью нескольких таких действий добиться того, чтобы одна из фишек оказалась в центральной клетке?

*Н.Чернятьев*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на Костромском областном Турнире юных математиков.

3. За круглым столом сидели 20 кондукторов. Затем между каждыми двумя соседними кондукторами сели по 20 водителей автобуса, таким образом всего за стол сели 400 водителей автобуса. Время от времени один



из водителей вставал из-за стола и уходил, забрав с собой двух соседей. Через некоторое время за столом осталось 3 кондуктора. Какое наименьшее количество водителей автобуса могло остаться к этому времени?

*И.Петренко*

4. Внутри квадрата  $11 \times 11$  клеток Максим нарисовал по линиям сетки несколько фигур (возможно одну), которые не соприкасаются даже углами и не касаются сторон квадрата. Каким может быть наибольший суммарный периметр этих фигур?

*Н.Чернятьев*



# Термодинамика и мотоцикл

А. СТАСЕНКО

«Привет вам, благородные векторы! Я добрый волшебник Ади Аба Ата...» Вывел Ади Аба Ата братьев на геодезическую линию, указал дорогу на Divgrad...

Как три вектора один детерминант в нуль обратили (из книги «Физики продолжают шутить»)

ОДНАЖДЫ В МОСКОВСКОМ ФИЗИКО-техническом институте шла конференция школьников в рамках программы «Старт в науку». Члены жюри внимательно слушали доклад девятиклассника о мотоциклах. В головах опытных слушателей возникали привычные термодинамические образы, начиная с простейших газовых процессов. Например, на рисунке 1 показаны три из них в координатах давление – объем ( $p, V$ ), давление – температура ( $p, T$ ), а также в трехмерном пространстве ( $p, T, V$ ). С этих частных ситуаций и начиналась термодинамика около двухсот лет тому назад. Кому же теперь не известны законы Гей-Люссака, Бойля–Мариотта, Шарля, Менделеева–Клапейрона!

А вот процесс посложнее (для описания) – адиабатический, т.е. происходящий без обмена теплотой с окружающими телами. На рисунке 2 он отмечен цифрой 4. Сравним его с изотермическим процессом 1. Видно, что при расширении рабочего тела (газа) от объема  $V_{\min}$  до  $V_{\max}$  для поддержания постоянной температуры в процессе 1 необходимо подвести энергию извне, а в адиабатическом процессе 4 теплообмена нет и газу приходится тратить часть собственной энергии на такое же увеличение объема. Поэтому его температура и давление уменьшаются. Тому, кто понимает, ясно, что в этом случае параметры состояния связаны соотношениями

$$p \sim V^{-\gamma} \sim T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

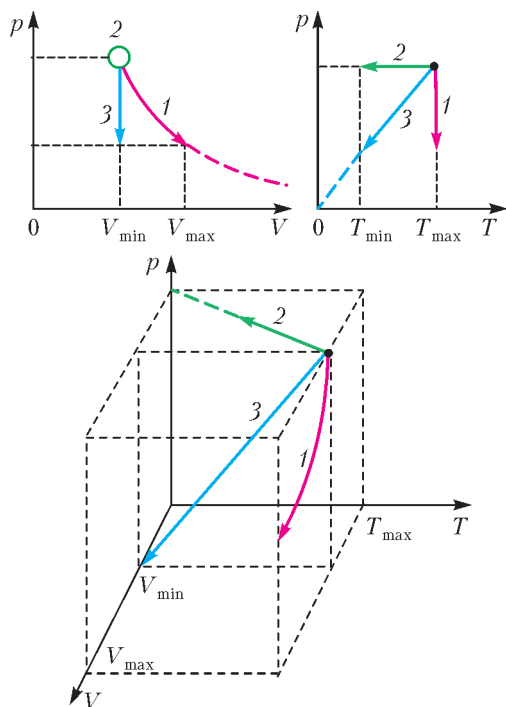


Рис. 1. Частные случаи газовых процессов на плоскости и в трехмерном пространстве: 1 – изотерма, 2 – изобара, 3 – изохора

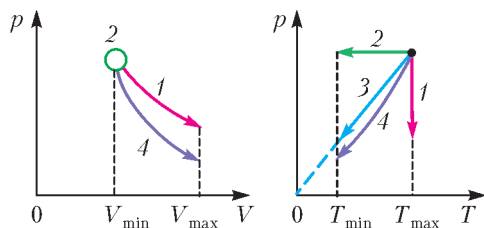


Рис. 2. Те же изопроцессы и адиабата

где  $\gamma = C_p/C_V$  – отношение молярных теплоемкостей газа в изобарическом и изохорном процессах (указаны соответствующие индексы  $p$  и  $V$ ).

Но существует еще более крутая зависимость давления от температуры – экспоненциальная. В этом случае речь идет о состоянии насыщенного пара, т.е. пара, находящегося в равновесии со своей жидкостью.

Вспомним барометрическую формулу: давление  $p$  атмосферы падает с высотой  $h$  по

закону

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

где  $p_0$  – давление на нулевой высоте,  $m$  – масса молекулы,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Показатель экспоненты можно переписать по-другому:

$$\frac{mgh}{kT} = \frac{N_A mgh}{N_A kT} = \frac{Mg(h-0)}{RT} = \frac{E(h) - E(0)}{RT}.$$

Здесь введены: число Авогадро  $N_A$  ( $[N_A] = 1/\text{моль}$ ), молярная масса  $M$  ( $[M] = \text{кг/моль}$ ), универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К) и, что самое важное, два энергетических состояния одного моля газа – на уровне моря ( $h = 0$ ) и на заданной высоте. Приведенные здесь формулы отражают важнейшую идею термодинамики: в равновесии значения давления, а значит, и концентрации частиц экспоненциально зависят от отношения разности потенциальных энергий в двух состояниях к хаотической тепловой энергии.

Но что значит испарить один моль жидкости? Это означает – вытащить ее молекулы из потенциальной ямы глубиной  $r$  ( $[r] = \text{Дж/моль}$ ) (и расширить газ до нужного объема). Следовательно, для давления насыщенного пара можно записать

$$p_{\text{нп}} \sim e^{-\frac{r}{RT}}.$$

Эта зависимость отмечена на рисунке 3 как кривая 5–6. Попробуйте изобразить ее в трехмерном пространстве состояний (как на предыдущих рисунках).

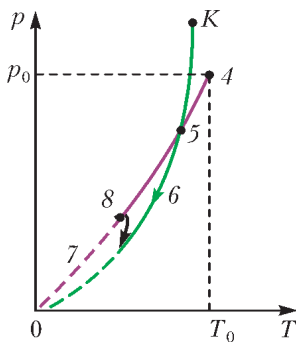


Рис. 3. Кривая насыщения и адиабата

А теперь представим, что газ расширяется из состояния  $p_0$ ,  $T_0$  адиабатически так, что его давление и температура уменьшаются (кривая 4–5 на рисунке 3). Рано или поздно эта кривая пересечет кривую насыщенного пара в точке 5. Но что будет дальше? Дальше возможны два сценария.

Если в газе уже существует достаточное количество центров конденсации, то пар выпадет на них, выделится теплота конденсации и система пойдет вдоль кривой 5–6 термодинамического равновесия между двумя фазами, которая соответствует более высокой температуре при данном давлении пара  $p_n$ .

А если таких центров нет, то газ проскочит состояние равновесия и, организовав свои собственные ядра конденсации, начнет «выпадать в осадок» на них (точка 8 на рисунке 3), стремясь вернуться на кривую 5–6. Но это происходит лишь при определенном значении так называемого пересыщения  $p_n/p_{\text{нп}} > 1$ .

Да, но что же мотоцикл? Ведь в его двигателе поршень ходит вверх-вниз не один раз в секунду, т.е. многократно реализуется замкнутый термодинамический цикл. Таких циклов придумано и использовано много: циклы Дизеля, Отто, Стирлинга, ..., Карно. Последний – цикл Карно – принципиально интересен тем, что обеспечивает наибольшее значение коэффициента полезного действия при работе в заданном диапазоне температур  $T_{\text{min}}$ ,  $T_{\text{max}}$ .

Оказывается все эти замкнутые процессы

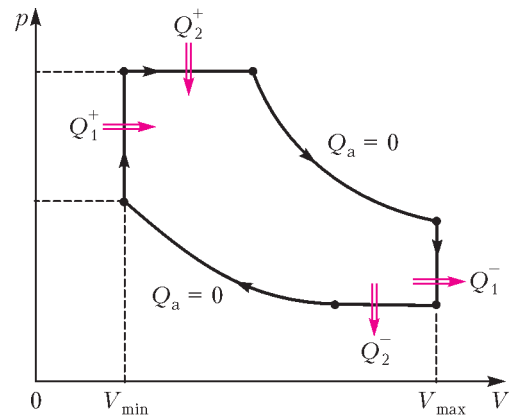


Рис. 4. Обобщенный цикл тепловой машины

можно обобщить в виде одного условного цикла (рис.4), который полезно внимательно рассмотреть. Он состоит из «кусков» разных процессов. На адиабатах нет ни подвода, ни отвода тепла ( $Q_a = 0$ ); на левой изохоре и верхней изобаре тепло подводится к рабочему телу ( $Q^+ > 0$ ); на правой изохоре и нижней изобаре тепло отводится от тела ( $Q^- < 0$ ). Все это можно подробно изучить,

поступив в МФТИ или МГУ. И даже придумать свой цикл...

Конечно, девятиклассник ничего такого не рисовал – эти мысли пронеслись в умах членов жюри. А Он говорил об истории мотоцикла (первый был, оказывается, четырехколесный!). И окончил доклад страстным призывом: «Любите Мотоцикл – и Он ответит Вам взаимностью!»

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Принцип Ферма и необычное поведение света

**М. РОМАШКА, М. ЕРМИЛОВ**

**И**ЗВЕСТНЫЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ принцип Ферма заключается в том, что луч света движется из начальной точки в конечную по такому пути, при котором время распространения света имеет локальный минимум. Что это означает?

Допустим, имеется прозрачная среда с переменным показателем преломления: показатель преломления разный в разных точках и является непрерывной функцией координат. В этой среде есть точечный источник и точечный приемник света. Принцип Ферма утверждает, что свет распространяется от источника к приемнику по такой траектории, чтобы время распространения имело локальный минимум. Если мы чуть-чуть изменим вид траектории в любом месте, то время распространения увеличится. Важно подчеркнуть, что время распространения имеет *локальный* минимум, а не *глобальный*. Те, кто знаком с исследованием функций, знают, что функция может иметь не один минимум, а несколько – несколько локаль-

ных минимумов. Глобальный минимум может и не существовать, если функция не ограничена снизу, а если ограничена, то глобальным минимумом является один из локальных. Похожая ситуация имеет место с распространением света: может существовать несколько кривых, т.е. несколько траекторий, на которых время распространения света имеет локальный минимум. В этом случае свет действительно будет распространяться от источника до приемника сразу по нескольким траекториям.

Вот такой интересный случай мы и рассмотрим в этой статье, а заодно потренируемся в применении оптической аналогии в задачах на поиск оптимального пути.

Принцип Ферма был впервые сформулирован Героном Александрийским еще в I веке нашей эры (правда, в некотором частном случае). С помощью этого принципа Герон обосновал закон прямолинейного распространения света и закон отражения света. С прямолинейным распространением все довольно просто: свет распространяется прямолинейно в оптически однородной среде, т.е. когда показатель преломления во всех точках одинаков. Действительно, кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая (точнее, отрезок). Чтобы время распространения было минимальным, нужно двигаться по прямой. С законом отражения немного поинтереснее. Как, исходя из принципа Ферма (или Герона), доказать, что угол падения равен углу отражения?

Пусть в точке  $S$  (рис.1) находится источник света, а в точке  $N$  – глаз наблюдателя

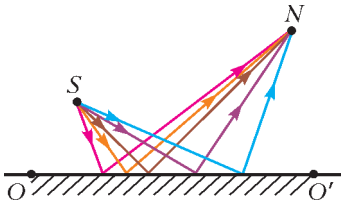


Рис. 1

(глаз – не точечный объект, но сейчас для нас важно лишь, что он малый). Свет попадает в глаз наблюдателя после отражения от плоского зеркала  $OO'$ . Рассмотрим множество возможных траекторий, по которым может распространяться свет (считаем, что свет распространяется в воздухе). Какой из путей самый короткий? Эту задачу можно переформулировать следующим образом. На прямой  $OO'$  надо найти такую точку  $K$ , чтобы сумма расстояний от нее до точек  $S$  и  $N$  была минимальной. Решение этой задачи было известно древним грекам: нужно построить отражение  $N'$  точки  $N$  относительно прямой  $OO'$  (рис.2). Тогда сумма расстоя-

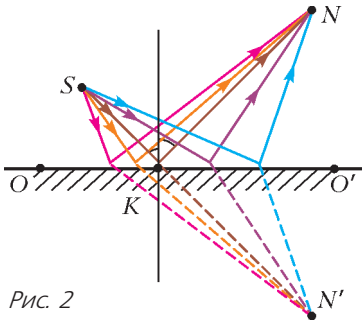


Рис. 2

ний от  $K$  до точек  $S$  и  $N$  равна сумме расстояний от  $K$  до точек  $S$  и  $N'$ . Очевидно, что эта сумма минимальна, когда  $K$  лежит на прямой  $SN'$ . Тогда из простых геометрических соображений ясно, что угол падения равен углу отражения. Поскольку эти рассуждения можно провести для любых произвольно взятых точек  $S$  и  $N$ , угол падения всегда равен углу отражения (если, конечно, отражение зеркальное, а не рассеянное).

В наиболее общем виде принцип Герона сформулировал Пьер Ферма в 1662 году. Он считал этот принцип основным законом геометрической оптики. Из него следовали все известные на тот момент законы геометри-

ческой оптики: закон прямолинейного распространения, закон отражения, а также и закон преломления света. Но этот принцип бывает полезен не только в оптике.

Посмотрим, как принцип Ферма помогает в задачах о поиске оптимального пути. Начнем с известной задачи.

**Задача 1.** Человек находится в поле в 3 км от ближайшей точки прямого шоссе. Человеку нужно попасть на автобусную остановку, находящуюся в 5 км от упомянутой точки. Скорость движения человека по полю 4 км/ч, а по шоссе 6 км/ч. К какой точке шоссе ему нужно идти, чтобы дойти до остановки в кратчайшее время?

**Решение.** Те, кто умеет исследовать функции с помощью производной, могут сразу увидеть путь решения этой задачи. Данные в задаче расстояния обозначим  $a$  и  $b$ , а расстояние вдоль шоссе до той точки, к которой нужно идти, обозначим  $x$  (рис.3).

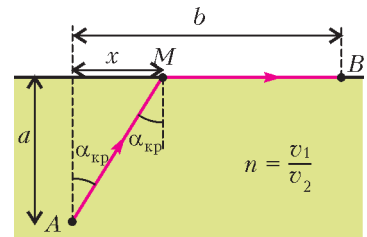


Рис. 3

Можно найти полное время движения как функцию от  $x$  и исследовать эту функцию на минимум. Но у этой задачи есть и другое, «физическое» решение – с помощью оптической аналогии. Согласно принципу Ферма, луч света движется из начальной точки  $A$  в конечную точку  $B$  по такому пути, при котором время распространения света имеет локальный минимум. Будем рассматривать шоссе как среду с показателем преломления 1, а поле – как среду с показателем преломления  $n = \frac{v_1}{v_2}$ , где  $v_1$  – скорость по шоссе, а  $v_2$  – скорость по полю. Зная закон преломления (закон Снеллиуса), мы можем легко найти изображенный на рисунке угол  $\alpha_{кр}$ . Он равен критическому углу, т.е. такому углу, что если угол падения света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду на любую величину больше



этого угла, то будет наблюдаться полное внутреннее отражение. Этот угол находится из закона преломления:

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{1}{n} = \frac{v_2}{v_1}.$$

С другой стороны, из геометрии получаем

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Теперь уже все просто (за исключением одной маленькой детали: может оказаться, что  $x$  больше  $b$ ). Не будем долго задерживаться на этой известной задаче (желающие могут дорешать ее самостоятельно), а перейдем к более интересной.

Однако, внимательный читатель может заметить: рассмотренная оптическая система не является средой с непрерывно изменяющимся показателем преломления. На границе поле-шоссе показатель преломления меняется резко, скачком. Что же получается: принцип Ферма здесь неприменим? Не беда: мы можем представить себе, что между полем и шоссе есть очень узкая полоса, на которой показатель преломления плавно меняется от  $n$  до 1. Введение такой полосы не меняет сути задачи, но делает применение принципа Ферма вполне законным.

**Задача 2** (о брошенной кошке). Жители деревни  $A$  продают свой дом, где они жили вместе с кошкой. Решив, что новым хозяевам кошка не понравится, они отвезли ее в деревню  $B$  (рис 4), проехав на машине  $a = 3$  км до  $T$ -образного перекрестка и еще  $b = 5$  км до деревни  $B$ , оставили ее там, вернулись обратно и продали дом. Кошка

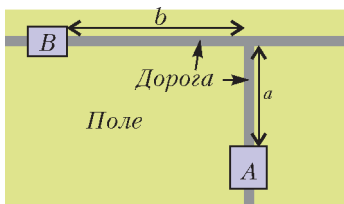


Рис. 4

же надеется, что новым хозяевам она понравится. Представим, что кошка может вернуться домой, причем за минимальное время. Она может двигаться по дороге со скоростью  $v_1 = 4$  км/ч, а по полю – со скоростью  $v_2 = 3,5$  км/ч.

1) По какой траектории должна двигаться кошка, чтобы вернуться домой за минимальное время? Чему равно это время?

2) Решите ту же задачу, если скорость кошки по полю равна  $v_2 = 2,5$  км/ч, а все остальные данные прежние.

**Решение.** Как же нужно двигаться кошке? Может быть, все время по дороге? Может, как-то срезать угол? А может быть, все время двигаться по полю? Заметим, что решить эту задачу чисто математически, с помощью исследования функции, будет не так просто, как предыдущую задачу, поскольку мы будем иметь дело с функцией двух переменных. Если кошка срезает угол, то нужно найти две точки: ту, где кошка должна свернуть в поле, и ту, где она должна снова выйти на дорогу. И вот здесь как раз полезна оптическая аналогия. Согласно принципу Ферма, луч света движется из начальной точки в конечную по такому пути, при котором время распространения света имеет локальный минимум. Будем считать дорогу средой с показателем преломления 1, а поле – средой с показателем преломления  $n = \frac{v_1}{v_2}$ .

Рассмотрим траекторию, при которой свет претерпевает преломление на границе этих двух сред (рис.5). При этом угол преломления равен критическому углу, определяемо-

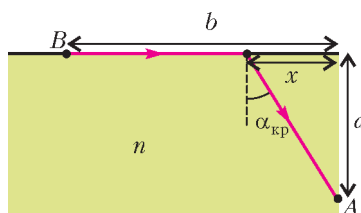


Рис. 5

му равенством

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{1}{n} = \frac{v_2}{v_1}.$$

С другой стороны, из рисунка находим

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

где  $x$  – расстояние от перекрестка до той точки, где кошка должна свернуть в поле. Из этих уравнений имеем

$$x = \frac{av_1}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{av_1^2}{v_2 \sqrt{v_1^2 - v_2^2}}.$$

Тогда время движения кошки по этому пути будет равно

$$t = \frac{b-x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_2} = \frac{b}{v_1} + \frac{a\sqrt{v_1^2-v_2^2}}{v_2^2}.$$

Но вспомним, что принцип Ферма позволяет находить траектории, обеспечивающие локальные минимумы времени распространения света, но не глобальный минимум. Понятно, что если скорость кошки в поле будет очень маленькой, то кошке будет выгодно бежать все время по дороге (рис.6).

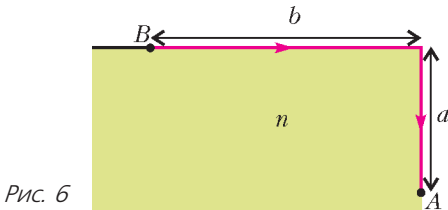


Рис. 6

В этом случае время движения кошки будет равно

$$T = \frac{a+b}{v_1}.$$

Таким образом, чтобы найти глобальный минимум времени движения кошки, нужно сравнить выражения для  $t$  и  $T$ , или, что то же самое, выражения  $\frac{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}{v_2^2}$  и  $\frac{1}{v_1}$ .

Получается, что в первом случае, когда  $v_2 = 3,5$  км/ч, кошке выгоднее двигаться по траектории, изображенной на рисунке 5. Однако, при этом величина  $x$  окажется равной примерно 6,2 км, что больше величины  $b$ . Это означает, что реально время движения имеет два локальных минимума: один реализуется, когда кошка сразу сворачивает в поле и все время бежит по нему, а второй – когда кошка все время бежит по дороге. В случае движения по полю время составит 1,67 ч, а в случае движения по дороге – 2 ч. Во втором случае, когда  $v_2 = 2,5$  км/ч, кошке выгоднее все время бежать по дороге, и время движения составит 2 ч.

Теперь обсудим вопрос, который, возможно, у внимательного читателя уже созрел. Как же работает принцип Ферма в том случае, когда кошка все время бежит по дороге? Кошка может на перекрестке повер-

нуть на 90 градусов, но может ли вести себя подобным образом свет? Здесь необходимо заметить, что, с современной точки зрения, принцип Ферма является следствием еще более общего принципа – принципа Гюйгенса–Френеля. Точнее, принцип Ферма представляет собой предельный случай принципа Гюйгенса–Френеля в волновой оптике для очень малой (по сравнению с другими объектами в задаче) длины волны света. Одним из важных явлений волновой оптики является дифракция света. И в аналогии, проведенной в данной задаче, свет может повернуть на 90 градусов как раз за счет дифракции. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля, каждая точка среды или вакуума, до которой дошло возмущение (световые волны), сама становится источником вторичных волн, а результирующее световое поле в каждой точке пространства определяется интерференцией этих волн. Когда свет, распространяясь от деревни  $B$  вдоль дороги, достигнет Т-образного перекрестка, от перекрестка начнут распространяться вторичные волны, часть которых будет направлена к деревне  $A$ . Таким образом, свет, вследствие дифракции, действительно «обогнет» угол. Интенсивность света, первым достигшего «родной деревни кошки», будет очень малой, но именно по такой траектории свет дойдет быстрее всего.

Доказать строго, что принцип Ферма является предельным случаем принципа Гюйгенса–Френеля, – задача непростая. Несколько упрощенное доказательство, приведенное самим Гюйгенсом, можно найти, например, в статье [1]. Здесь мы ограничимся геометрической оптикой и оптической аналогией (или, более точно, оптико-механической аналогией). С помощью этой аналогии можно решать некоторые задачи механики, и одну из классических задач мы рассмотрим. Но для начала подытожим, что мы имеем. Во-первых, принцип Ферма иногда работает в сочетании с законом преломления, как было в двух решенных выше задачах. Во-вторых, принцип Ферма можно использовать и самостоятельно, без дополнительных законов, поскольку он сам является наиболее общим зако-

ном геометрической оптики. Второй путь часто оказывается более сложным в математическом плане, поэтому мы сначала остановимся на первом.

Рассмотрим две задачи о ходе луча в среде с переменным показателем преломления.

**Задача 3.** Луч света падает из среды с показателем преломления  $n_0$  под углом  $\alpha_0$  на границу раздела со средой, показатель преломления которой зависит только от одной координаты  $x$  (рис.7) по закону

$$n(x) = \sqrt{\left(\frac{a}{x+b} - c\right)^2 + n_0^2 \sin^2 \alpha_0}, \text{ где } a, b \text{ и } c$$

– некоторые положительные константы,  $a > bc$ . На какую максимальную глубину свет проникнет в эту среду?

Прежде всего заметим, что не надо пугаться столь сложной зависимости  $n(x)$  – мы специально выбрали ее такой, чтобы решение было проще.

Применим прием, который встречается во многих физических задачах: разобьем среду с переменным показателем преломления  $n(x)$  на множество тонких параллельных

слоев, в каждом из которых показатель преломления можно приближенно считать постоянным (рис.8). Угол, который луч света образует с осью  $x$ , будет разным в разных слоях. Но из закона преломления следует, что произведение синуса этого угла на показатель преломления постоянно во всех слоях:  $n \sin \alpha = \text{const}$ , причем  $\text{const} = n_0 \sin \alpha_0$ . Переходя к пределу бесконечно малой толщины слоев, мы получим уравнение  $n(x) \sin \alpha(x) = n_0 \sin \alpha_0$ , откуда можно выразить синус угла, который является теперь функцией координаты:

$$\sin \alpha(x) = \frac{n_0 \sin \alpha_0}{n(x)}.$$

Видим, что при данной в задаче функции  $n(x)$  обе части этого равенства возрастают с ростом  $x$ . Однако синус любого угла не может превысить единицы. Отсюда можно найти максимальную глубину проникновения луча в среду. Предельная глубина  $x_{\text{пр}}$  проникновения луча в среду соответствует случаю, когда  $\sin \alpha(x_{\text{пр}}) = 1$ . Остается подставить данную в задаче функцию  $n(x)$  в уравнение

$$\frac{n_0 \sin \alpha_0}{n(x_{\text{пр}})} = 1,$$

откуда найдем

$$x_{\text{пр}} = \frac{a}{c} - b.$$

**Задача 4.** Луч света падает из среды с показателем преломления  $n_0$  под углом  $\alpha_0$  на границу раздела со средой, показатель преломления которой зависит только от одной координаты  $x$  (см. рис.7) по закону

$$n(x) = \sqrt{\left(\frac{a}{x+b}\right)^2 + n_0^2 \sin^2 \alpha_0}, \text{ где } a \text{ и } b -$$

некоторые положительные константы. Найдите уравнение траектории светового луча в этой среде.

**Решение.** Чтобы найти уравнение траектории, нам будет полезно найти тангенс угла  $\alpha$  как функцию  $x$ . Для чего нам нужен тангенс? Вспомним, что тангенс угла наклона касательной к функции  $y(x)$  равен производной  $y'(x)$ . А зная производную, мы сможем найти и саму функцию. Из формулы для  $\sin \alpha(x)$  (см. предыдущую задачу) с помощью основного тригонометрического тождества несложно найти тангенс:

$$\text{tg } \alpha(x) = \frac{n_0 \sin \alpha_0}{\sqrt{n^2(x) - n_0^2 \sin^2 \alpha_0}}.$$

Приравнивая левую часть этой формулы производной функции  $y(x)$ , в нашем случае получаем

$$y'(x) = \frac{n_0 \sin \alpha_0}{a} b + \frac{n_0 \sin \alpha_0}{a} x.$$

Беря первообразную, находим саму функ-

(Продолжение см. на с. 34)

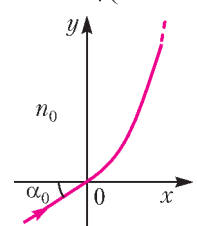


Рис. 7

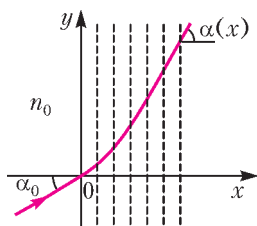


Рис. 8

# Инверсоры

В XIX веке перед инженерами-механиками встал важная задача: создать *прямило* – механизм, переводящий движение по окружности в движение по прямой. Предполагалось, что решение будет *плоским шарнирным механизмом* – системой плоских звеньев разной длины, сцепленных на концах шарнирами.

Великий российский математик Пафнутий Львович Чебышёв смог придумать лишь приближенное прямило, переводящее движение по окружности одного шарнира в движение другого шарнира рядом с отрезком прямой, но не в точности вдоль него (рис.1).

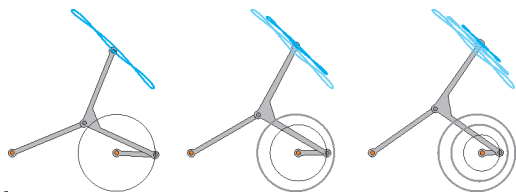


Рис. 1

Уклонение шатунной кривой от прямой линии можно уменьшать, изменяя параметры механизма. При этом будет уменьшаться и длина хода ведомого шарнира, но это происходит медленнее, чем уменьшение отклонения от прямой. Поэтому для практических целей можно подобрать удовлетворительные параметры, однако с теоретической точки зрения задача остается нерешенной.

Создать точное прямило помогает *инверсия* – преобразование плоскости (без одной точки), переводящее внутренние точки круга, за исключением центра, в точки, лежа-

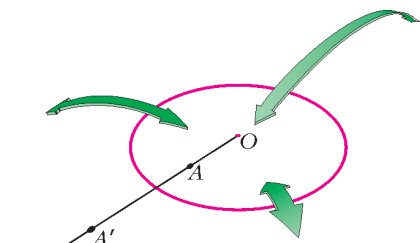


Рис. 2

щие вне окружности, и наоборот по правилу  $AO \cdot OA' = R^2$  (рис.2).

Инверсия обладает многими интересными и полезными свойствами (многие из них, вместе с доказательствами, можно найти в брошюре И.Д.Жижилкина «Инверсия»). Для нас наиболее интересно следующее свойство: дуга окружности, проходящей через центр инверсии, переходит в отрезок (рис.3).

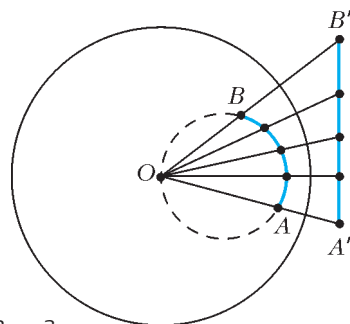


Рис. 3

Это свойство инверсии используется в *инверсоре Поселье–Липкина*, первом плоском шарнирном механизме, переводящем движение по окружности в движение по прямой. Он был придуман в 1860-х годах независимо офицером инженерного корпуса французской армии Шарлем Николя Поселье (1823–1913) и студентом П.Л.Чебышёва Липманом Липкиным (1846–1876).

Инверсор Поселье–Липкина основан на следующем соображении. Пусть  $APA'Q$  – ромб со стороной  $a$ , а точка  $O$  такова, что  $OP = OQ = b$ , причем  $b > a$ . Вычислим произведение  $OA \cdot OA'$ . Для этого заметим, что точки  $O, A$  и  $A'$  всегда лежат на одной прямой, проведем в ромбе диагонали – пусть они пересекаются в точке  $X$  – и несколько раз применим теорему Пифагора:

$$\begin{aligned} OA \cdot OA' &= (OX - XA) \cdot (OX + XA) = \\ &= OX^2 - XA^2 = (b^2 - PX^2) - (a^2 - PX^2) = \\ &= b^2 - a^2. \end{aligned}$$



$$OX^2 - XA^2 = (b^2 - PX^2) - (a^2 -$$

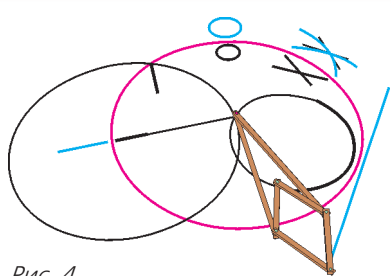
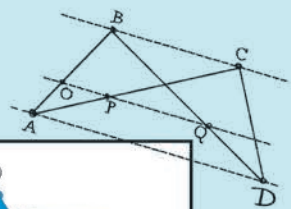


Рис. 4

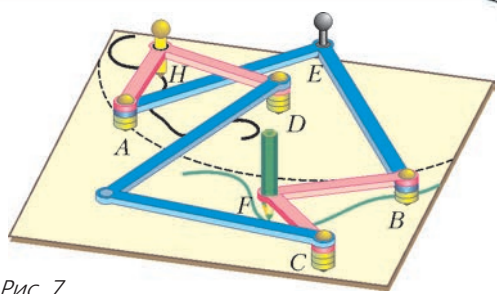


Рис. 7

Мы получили, что точка  $A$  переходит в точку  $A'$  при инверсии с центром  $O$  и радиусом  $\sqrt{b^2 - a^2}$ . Таким образом, если



Рис. 5

сделать вершины конструкции шарнирными и закрепить вершину  $O$ , мы получим механизм, реализующий инверсию (рис.4). Добавив еще один шарнир, заставляющий точку  $A'$  двигаться по окружности (центр окружности закреплен), мы получим инверсор Поселье-Липкина (рис.5).

Позже были изобретены и другие инверсоры. Мы покажем два из них – инверсор Гарта и инверсор Кемпе-Сильвестра – и предлагаем читателю самостоятельно проверить, что эти механизмы действительно обладают требуемым свойством.

*Инверсор Гарта* (рис.6). Изобретен Гарри Гартом (Harry Hart) в 1874–1875 годах. Реализует инверсию любой кривой.

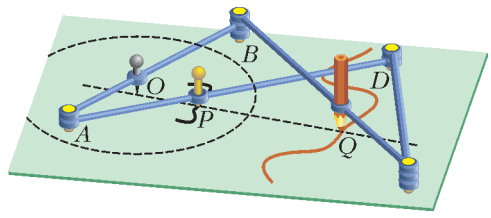


Рис. 6

*Инверсор Кемпе-Сильвестра* (рис.7). Впервые описан английскими математиками А.Б.Кемпе и Дж.Дж.Сильвестром в середине 1870-х гг. Реализует последовательное применение инверсии и поворота.

С помощью механизма-инверсора можно, например, изготовить табурет, сиденье которого может двигаться параллельно полу. На рисунке 8 изображена схема такого табурета на основе инверсора Чебы-

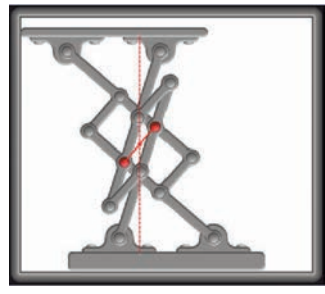


Рис. 8

шёва (движение приближенное). На рисунке 9 представлен табурет на основе инверсора Кемпе-Сильвестра, реализующий точное параллельное движение.

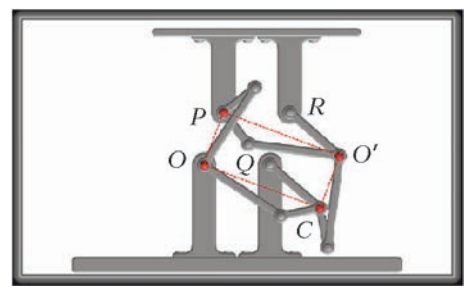
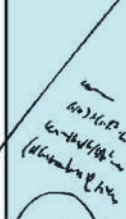
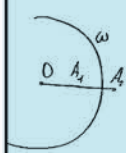


Рис. 9

Подробнее об инверсорах можно прочитать в книге А.Б.Кемпе «Как нарисовать прямую линию». Интернет-версию этой книги с красивыми анимациями можно найти в системе «Задачи по геометрии»: <http://zadachi.mccme.ru/2012/ntz.html>.

Публикацию подготовил Н.Андреев





(Начало см. на с. 27)

цию  $y(x)$  (с точностью до константы):

$$y(x) = \frac{n_0 \sin \alpha_0}{a} bx + \frac{n_0 \sin \alpha_0}{2a} x^2 + C.$$

Константа  $C$  определяется из условия, что при  $x = 0$  должно быть  $y = 0$  (именно так мы ввели систему координат). Получаем  $C = 0$ . Таким образом, в данной среде траектория луча будет представлять собой часть параболы.

Теперь разберем одну известную, классическую, но более сложную задачу – о брахистохроне. Слово «брахистохрона» означает «кривая наискорейшего спуска».

**Задача 5** (о брахистохроне). Пусть из точки с координатами  $(0, 0)$  по абсолютно гладкому желобу движется тело малых

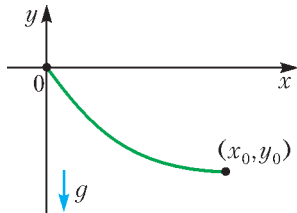


Рис. 9

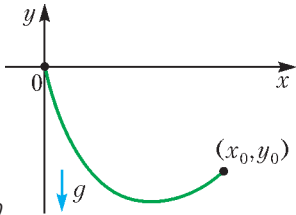


Рис. 10

размеров и попадает в заданную точку с координатами  $(x_0, y_0)$  (рис. 9, 10). Полагая  $x_0 > 0$ ,  $y_0 < 0$ . Требуется найти такую форму желоба, при которой время движения тела будет минимальным.

Эта задача была сформулирована Иоганном Бернулли в 1696 году и вскоре решена различными способами сразу несколькими выдающимися физиками и математиками. Мы хотим показать, как можно решить эту задачу, используя оптико-механическую аналогию и принцип Ферма.

Итак, пусть тело скользит по некоторой кривой, не испытывая трения. Из закона

сохранения энергии имеем, что скорость тела целиком определяется его вертикальной координатой:

$$v = \sqrt{-2gy} \quad (\text{напомним, что } y < 0).$$

Здесь возникает аналогия с задачей о траектории светового луча в среде, коэффициент преломления которой есть

$$n(y) = \frac{v_0}{\sqrt{-2gy}},$$

где  $v_0$  – вообще говоря, произвольная положительная константа. Такие константы обычно называют нормировочными. Например, в качестве нормировочного значения  $v_0$  можно выбрать ту скорость, которую тело приобретет, проходя через заданную точку при  $y = y_0$ . В этом случае нетрудно убедиться, что формула для эквивалентного показателя преломления такова:

$$n(y) = \sqrt{\frac{y_0}{y}}.$$

Введем угол  $\alpha$  между касательной в произвольной точке кривой и вертикальной осью, подобно тому как это делалось в задачах 3 и 4. Для него, как мы знаем, выполняется равенство

$$n(y) \sin \alpha(y) = s = \text{const}.$$

Записывая производную  $y'(x)$  в более удобных в ряде физических задач обозначениях:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \text{ получим}$$

$$dx = -dy \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{здесь } dy < 0),$$

или, выразив  $\operatorname{tg} \alpha$  через  $\sin \alpha = \frac{s}{n}$  –

$$dx = -dy \sqrt{\frac{s^2 \frac{y}{y_0}}{1 - s^2 \frac{y}{y_0}}}.$$

В принципе задачу можно решить, взяв интеграл от правой части последнего равенства (довольно-таки громоздкий, надо сказать). Но мы поступим несколько иначе, введя специальный параметр  $\varphi$ , через который выразим обе координаты:  $x = x(\varphi)$  и  $y = y(\varphi)$ . А именно, положим

$$s^2 \frac{y}{y_0} = \sin^2 \varphi$$

(эта замена корректна, так как из предыдущего выражения видно, что выполняется двойное неравенство  $0 \leq s^2 \frac{y}{y_0} < 1$ ). Тогда после несложных тригонометрических преобразований будем иметь

$$dx = -\frac{y_0}{2s^2}(1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется элементарно, поскольку слева стоит только переменная  $x$ , а справа – только переменная  $\varphi$ . И мы получим уравнение траектории – брахистохроны, записанное с помощью параметра  $R$ :

$$\begin{aligned} x &= R(\varphi - \sin \varphi), \\ y &= -R(1 - \cos \varphi), \end{aligned} \quad \text{где } R = \frac{|y_0|}{2s^2}.$$

Кривая, представляемая такими равенствами, известна под названием *циклоида* – это траектория, которую описывает произвольная точка на ободе колеса радиусом  $R$ , катящегося без проскальзывания по горизонтальной прямой. В общем случае параметр  $R$  в принципе можно определить через координаты  $(x_0, y_0)$ , но, к сожалению, решение это не аналитическое, а численное. Геометрическое решение этой задачи (с помощью построения), предложенное самим И.Бернулли, можно найти в статье [1]. Отметим только, что брахистохрона может иметь вид, показанный на рисунке 10: ее участок лежит ниже точки  $(x_0, y_0)$ . А в одной из задач для самостоятельного решения мы предлагаем рассмотреть важный частный случай, когда начальная и конечная точки находятся на одной и той же высоте. В этом случае параметр  $R$  легко вычисляется.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Два дома стоят в поле на некотором расстоянии от прямой дороги. Расстояние от каждого дома до дороги одинаково и равно  $a$ . Дома смещены друг относительно друга в направлении, параллельном дороге, на величину, равную  $2b$ . Предполагая, что скорость бега кошки по дороге в  $n$  раз больше, чем по полю, определите оптимальную траекторию бега кошки из одного дома в другой. Рассмотрите два случая: а) два дома находятся по одну сторону от дороги; б) два дома находятся по разные стороны от дороги.

2. Вернемся к исходной задаче о брошенной кошке, рассмотренной в статье. Существует ли

такое отношение скоростей кошки на дороге и в поле, при котором имеется бесконечно много траекторий, на каждой из которых время движения одинаково?

3. Представим на минуту, что атмосфера Земли внезапно исчезла. Куда сместятся видимые положения всех звезд на небе: от зенита или к зениту?

4. Выведите закон преломления света: а) из принципа Ферма; б) из принципа Гюйгенса–Френеля.

5. Луч света падает из среды с показателем преломления  $n_0$  под углом  $\alpha_0$  на границу среды, показатель преломления которой зависит только от одной координаты  $x$  (см. рис.7) по закону

$n(x) = \sqrt{ke^{-px} + n_0^2 \sin^2 \alpha_0}$ , где  $k$  и  $p$  – некоторые положительные константы. Найдите уравнение траектории светового луча в этой среде.

6. Имеется прозрачная пластинка с полукруглым вырезом (рис.11), обладающая следующим

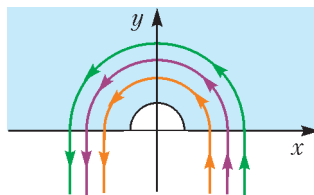


Рис. 11

свойством: любой луч света, падающий на нее нормально (перпендикулярно поверхности), описывает полуокружность и выходит из нее (точнее, он частично отражается на каждой из границ раздела сред). Найдите зависимость показателя преломления пластинки от координат  $x$  и  $y$ , если известно, что в точке с координатами  $(x_0, 0)$  показатель преломления равен  $n_0$ .

7. Луч света падает из вакуума под углом  $\alpha$  на границу прозрачной среды, показатель преломления  $n$  которой является функцией только одной координаты  $x$  (см. рис.7). Какому условию должна удовлетворять функция  $n(x)$ , чтобы свет, попавший в эту среду, снова вышел из нее? Функция  $n(x)$  непрерывна.

8. Рассмотрите частный случай задачи о брахистохроне, когда точка старта и точка финиша находятся на одной и той же высоте. Вычислите параметр  $R$  и время движения от старта до финиша.

**Литература**

1. Е.Д.Трифонов. Вариационные принципы в физике (Соросовский образовательный журнал, 1998, №6)  
 2. Е.Д.Трифонов. Оптико-механическая аналогия в изложении для школьников (Соросовский образовательный журнал, 1997, №10)

## Задачи

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.

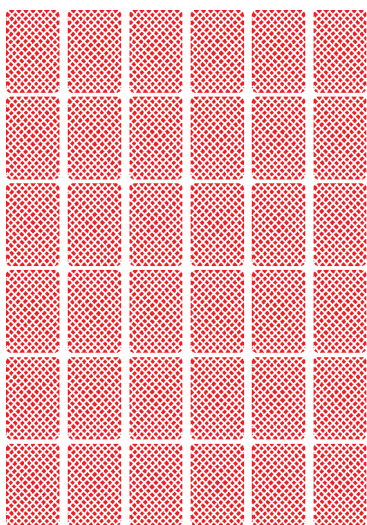
Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

*Желаем успеха!*

**16.** По кругу сидели  $N$  болтунов. Сначала один из них рассказал один анекдот, следующий по часовой стрелке – два анекдота, следующий – три и так далее по кругу, пока один не рассказал  $N^2$  анекдотов за раз. Тут болтуны устали, и следующий по часовой стрелке рассказал  $(N^2 - 1)$  анекдот, следующий –  $(N^2 - 2)$  и так далее по кругу, пока один из болтунов не рассказал всего один анекдот, и все разошлись. Сколько всего анекдотов было рассказано? Сколько анекдотов рассказал каждый из  $N$  болтунов?

*Е.Бакаев*



**17.** Все 36 карт колоды выложены рубашкой вверх в виде «квадрата»  $6 \times 6$ . За один ход игрок может выбрать 9 карт, образующих «квадрат»  $3 \times 3$ , и узнать набор карт, который им соответствует (без указания места, где какая карта лежит).

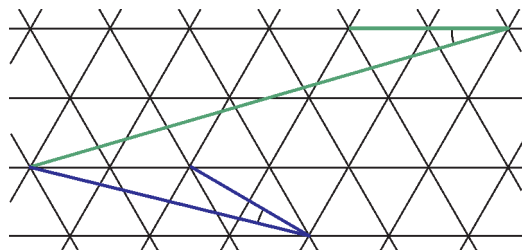
а) Докажите, что за несколько ходов игрок может определить любую карту, на которую укажет ведущий.

б) Какого наименьшего числа ходов достаточно, чтобы узнать угловую карту?

*М.Евдокимов*

**18.** На сетке из равносторонних треугольников отметили два угла. Докажите, что они равны.

*Е.Бакаев*



**19.** На доске  $10 \times 10$  стоят 10 ладей. Докажите, что можно сделать ими не более 13 ходов так, чтобы в получившейся расстановке ладьи не били друг друга. (Ладьи не могут перепрыгивать друг через друга.)

*Н.Чернятьев*

## Птолемеева ось треугольника

**К. КОЗЕРЕНКО, П. ФАКАНОВ**

**Н**АРИСУЕМ ТРЕУГОЛЬНИК, ВПИШЕМ В него окружность  $\omega$  и опишем около него окружность  $\Omega$ . Если теперь сотрем треугольник, то мы его уже не сможем восстановить: существует бесконечное семейство треугольников, «зажатых» между данными окружностями (рис.1). Это частный случай знаменитой теоремы Понселе (см. например,

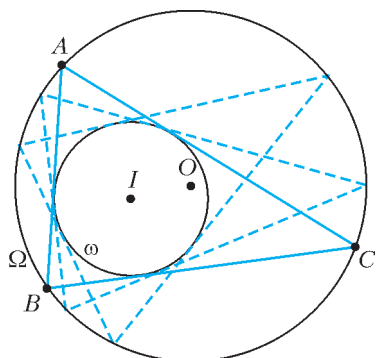


Рис. 1

статью В. Протасова в «Кванте» №5–6 за 2014 г.), поэтому условимся называть треугольники из этого семейства *треугольниками Понселе* (для пары окружностей  $\Omega$  и  $\omega$ ). Интересно следить за движением замечательных точек треугольника, когда треугольник Понселе «вращается» между двух данных окружностей.

«Квант» уже не раз обращался к этой теме. В замечательной статье В.Дубровского и В.Сендерова «Ловушка для треугольника» («Квант» №3 за 1999 г.) были указаны траектории ортоцентра, центра масс (точки пересечения медиан) и центра окружности девяти точек треугольников Понселе. В статье А.Заславского, Д. Косова и М. Музафарова «Траектории замечательных точек треугольника Понселе» («Квант» №2 за 2003 г.), кроме того, были найдены траектории точек Нагеля и Жергонна. Напомним,

что точка Жергонна треугольника – это точка пересечения трех отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью (рис.2,а), а точка Нагеля – точка пересечения трех отрезков, соединяющих

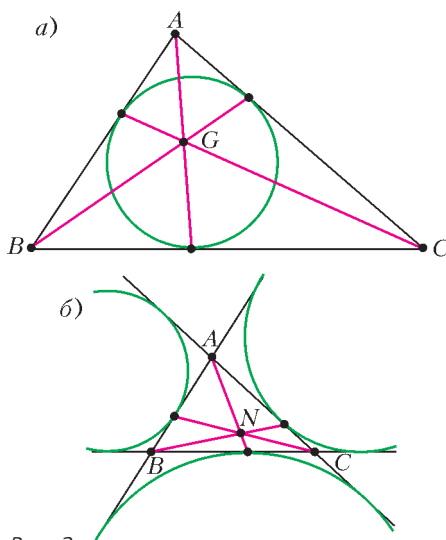


Рис. 2

вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями (рис.2,б).<sup>1</sup>

Все траектории упомянутых замечательных точек являются окружностями, центры которых лежат на линии центров окружностей  $\Omega$  и  $\omega$ . Здесь имеется некоторая аналогия с геоцентрической системой Птолемея (все планеты вращаются по окружностям, центры которых в свою очередь лежат на окружности), эта аналогия дала название «птолемеева ось». В этой статье мы снова обратим основное внимание на точки Жергонна и Нагеля треугольников Понселе и дадим описание окружностей, по которым они движутся. Но в отличие от статьи А.Заславского, Д.Косова и М.Музафарова, где основным инструментом являлись алгебраические преобразования и барицентрические координаты, мы дадим геометрические доказательства.

<sup>1</sup> По этой теме см. также проект, предложенный на Летней конференции Турнира городов в 2014 г.: <http://www.turgor.ru/1ktg/2014/6/index.htm>

### Подготовка

Далее обозначим через  $O$  и  $I$  центры окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, а через  $R$  и  $r$  – их радиусы. Основной факт, на который мы будем опираться, – следующее описание траектории ортоцентра треугольника Понселе:

*ортоцентр  $H$  треугольника Понселе  $ABC$  описывает окружность радиуса  $R - 2r$  с центром в точке  $O_h$ , симметричной точке  $O$  относительно  $I$ .*

Кроме того, будем без доказательства пользоваться следующими известными свойствами (рис.3; см., например, статью И.Ша-

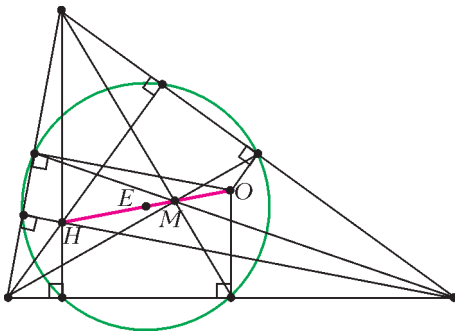


Рис. 3

рыгина и А.Ягубьянца «Окружность девяти точек и прямая Эйлера» в «Кванте» №8 за 1981 г.):

*в треугольнике  $ABC$  середины сторон и основания высот лежат на одной окружности (которая называется окружностью девяти точек или окружностью Эйлера); ее радиус вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника  $ABC$ ;*

*центр описанной окружности  $O$ , ортоцентр  $H$ , центр масс  $M$  и центр окружности Эйлера  $E$  лежат на одной прямой (которая называется прямой Эйлера), причем  $E$  – середина отрезка  $OH$ , а  $M$  делит отрезок  $OH$  в отношении  $NM:OM = 2:1$ .*

Также мы будем многократно использовать свойства гомотетии и еще одно свойство симедианы, которое сформулируем по ходу изложения.

### Упражнения

1. Выведите из факта про траекторию ортоцентра, что:

а) центр масс  $M$  треугольника Понселе описы-

вает окружность радиуса  $\frac{R-2r}{3}$  с центром в точке  $O_m$  такой, что  $\overline{IO_m} = \frac{1}{3}\overline{IO}$ ;

б) центр  $E$  окружности Эйлера треугольника Понселе описывает окружность радиуса  $\frac{R-2r}{2}$  с центром в точке  $I$ .

2. Выведите из упражнения 1,6 теорему Фейербаха: окружность Эйлера внутренним образом касается вписанной окружности.

### Точка Нагеля

Работать с точкой Нагеля  $N$  поможет следующая теорема.

**Теорема о прямой Нагеля.** *В треугольнике точки  $N$ ,  $M$  (центр масс) и  $I$  (центр вписанной окружности) лежат на одной прямой, при этом  $M$  делит отрезок  $NI$  в отношении  $NM:MI = 2:1$ .*

Доказательство основано на такой лемме.

**Лемма.**  $AN \parallel M_A I$ , где  $M_A$  – середина стороны  $BC$ .

**Доказательство леммы.** Проведем касательную к вписанной окружности, параллельную стороне  $BC$  (рис.4), обозначим

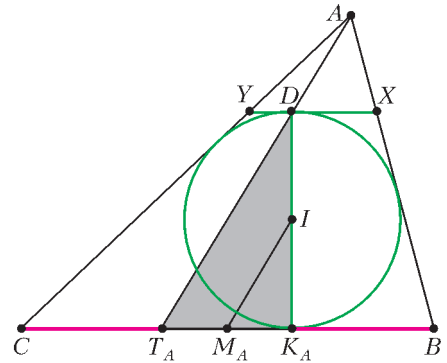


Рис. 4

через  $D$ ,  $X$ ,  $Y$  точку касания и точки пересечения с  $AB$  и  $AC$ . Вписанная окружность является вневписанной окружностью для треугольника  $AXY$ . Значит, гомотетия с центром  $A$ , переводящая треугольник  $AXY$  в треугольник  $ABC$ , переведет точку  $D$  в точку  $T_A$  касания вневписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$  (т.е. прямая  $T_A D$  совпадает с прямой  $AN$ ). Известное равенство  $BK_A = CT_A$ , где  $K_A$  – точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ , дает  $T_A M_A = K_A M_A$ . Отрезок  $DK_A$  являет-



ся диаметром вписанной окружности, значит,  $M_A I$  – средняя линия треугольника  $T_A D K_A$  и  $T_A D \parallel M_A I$ . Лемма доказана.

Рассмотрим треугольник  $M_A M_B M_C$  с вершинами в серединах сторон треугольника  $ABC$ . Этот треугольник переводится гомотетией с центром  $M$  и коэффициентом  $-2$  в треугольник  $ABC$  (рис.5). Лемма показыва-

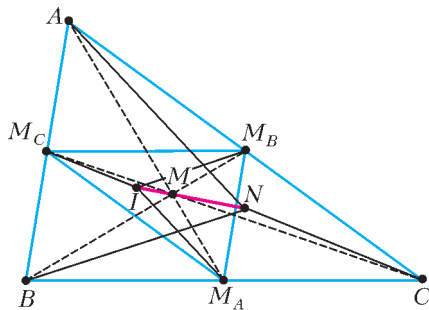


Рис. 5

ет, что прямые  $M_A I$  и  $AN$  – это соответствующие прямые в гомотетичных треугольниках  $M_A M_B M_C$  и  $ABC$ . То же можно сказать о парах прямых  $M_B I$  и  $BN$ ,  $M_C I$  и  $CN$ , следовательно, точки  $I$  и  $N$  – соответствующие точки в треугольниках  $M_A M_B M_C$  и  $ABC$ . Значит, центр гомотетии  $M$  находится на прямой  $NI$ , при этом  $\overline{MN} = -2\overline{MI}$  (коэффициент гомотетии равен  $-2$ ). Теорема доказана.

Из свойств прямой Эйлера и прямой Нагеля следует, что  $\overline{MN} = 2\overline{OM}$ ,  $\overline{MN} = 2\overline{IM}$ . Значит, треугольник  $OMI$  подобен треугольнику  $HMN$  с коэффициентом  $1 : 2$  (рис.6). Отсюда  $\overline{HN} = 2\overline{IO}$ . Но, как нам

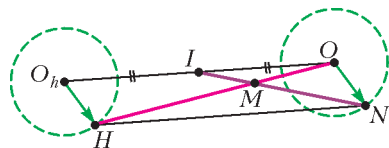


Рис. 6

известно,  $\overline{OO_h} = 2\overline{OI}$ . Отсюда следует, что  $\overline{HN} = \overline{O_h O}$ , значит, точка  $N$  получается из точки  $H$  параллельным переносом на фиксированный вектор  $\overline{O_h O}$ . Теперь легко получить описание движения точки  $N$ : она движется (синхронно с точкой  $H$ ) по окружности с центром  $O$  радиуса  $R - 2r$ .

### Точка Жергонна

К точке Жергонна  $G$  «подобраться» несколько сложнее. Сделаем это в несколько шагов.

Пусть  $A_1, B_1, C_1$  – точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC, CA, AB$  соответственно, а  $A', B', C'$  – основания высот треугольника  $A_1 B_1 C_1$ .

1) Пусть  $AI$  пересекает  $\Omega$  вторично в точке  $W_a$  (рис.7). Так как  $AI$  – биссектриса угла  $BAC$ , то  $W_a$  – середина дуги  $BC$ , значит,

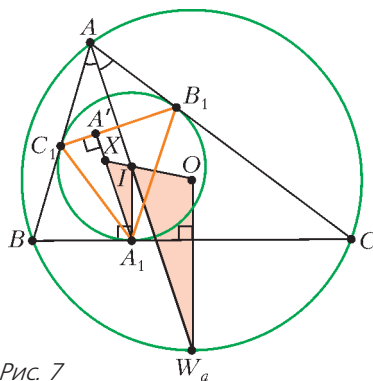


Рис. 7

$OW_a \perp BC$ , т.е.  $OW_a \parallel IA_1$ . Далее,  $AI \parallel A_1 A'$ , так как  $AI \perp B_1 C_1$  и  $A_1 A' \perp B_1 C_1$ . Пусть  $X$  – точка пересечения  $OI$  и  $A_1 A'$ . Тогда у треугольников  $XIA_1$  и  $IOW_a$  соответствующие стороны параллельны, значит, они подобны, откуда  $XI : IO = IA_1 : OW_a$ , т.е.  $XI : IO = r : R$ , значит,  $\overline{IX} = \frac{r}{R} \overline{OI}$ . Точка  $X$ , определенная последним равенством, лежит на высоте  $A_1 A'$ . Аналогично, она лежит и на других высотах треугольника  $A_1 B_1 C_1$ , т.е. совпадает с ортоцентром  $H_1$  треугольника  $A_1 B_1 C_1$ . Итак,  $H_1$  лежит на «птолемеевой оси»<sup>2</sup> и определяется равенством  $\overline{IH_1} = \frac{r}{R} \overline{OI}$ . В частности,  $H_1$  неподвижна при «вращении» треугольника Понселе.

**Упражнение 3.** Докажите, что  $I$  – ортоцентр треугольника  $W_a W_b W_c$  (здесь  $W_b$  и  $W_c$  – середины дуг  $CA$  и  $AB$ ); треугольники  $W_a W_b W_c$  и  $A_1 B_1 C_1$  гомотетичны и  $OI$  – их общая прямая Эйлера.

<sup>2</sup> Этот факт предлагался в 2002 году в виде задачи М1819 в «Задачнике «Кванта».

2) Так как для треугольника  $A_1B_1C_1$  центр описанной окружности – это  $I$ , то центр  $E_1$  окружности Эйлера треугольника  $A_1B_1C_1$  – это середина отрезка  $H_1I$ , значит,  $E_1$  тоже неподвижна ( $E_1$  определяется равенством  $\overline{IE_1} = \frac{r}{2R} \overline{OI}$ .)

3) Нетрудно понять, что у треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  соответствующие стороны параллельны (рис.8). Действительно,

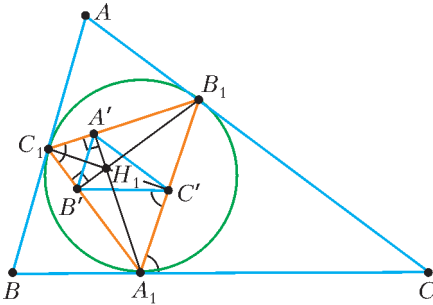


Рис. 8

$\angle B'C'A_1 = \angle B_1C_1A_1$ , так как точки  $B_1, C_1, B', C'$  лежат на одной окружности с диаметром  $B_1C_1$ . А из касания  $\angle C'A_1C = \angle B_1C_1A_1$ , откуда  $\angle B'C'A_1 = \angle C'A_1C$  и тем самым  $B'C' \parallel BC$ . Для других пар сторон рассуждения аналогичны.

4) По известному свойству  $A_1A$  является медианой (т.е. прямой, симметричной медиане относительно соответствующей биссектрисы) в треугольнике  $A_1B_1C_1$  (см., например, статью Ю.Блинкова в «Кванте» №4 за 2015 г.). Из подобия  $\Delta A_1B'C' \sim \Delta A_1B_1C_1$  следует, что для треугольника  $A_1B'C'$  прямая  $A_1A$  является медианой, т.е. проходит через середину  $M'_A$  отрезка  $B'C'$ . Аналогично,  $BB_1$  и  $CC_1$  проходят через середины  $M'_B$  и  $M'_C$  отрезков  $C'A'$  и  $A'B'$

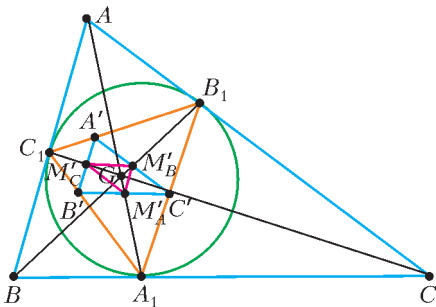


Рис. 9

соответственно. Иначе говоря, прямые  $AM'_A, BM'_B$  и  $CM'_C$  пересекаются в точке  $G$  (рис.9). Поскольку у треугольников  $ABC$  и  $M'_AM'_BM'_C$  соответствующие стороны параллельны (у каждого из них соответствующие стороны параллельны сторонам треугольника  $A'B'C'$ ), эти треугольники гомотетичны с центром гомотетии  $G$ .

5) Коэффициент гомотетии, переводящей  $ABC$  в  $M'_AM'_BM'_C$ , вычислим как отношение радиусов описанных окружностей этих треугольников. Окружность ( $A'B'C'$ ) имеет радиус  $r/2$  как окружность Эйлера треугольника  $A_1B_1C_1$ , значит, окружность ( $M'_AM'_BM'_C$ ) имеет вдвое меньший радиус  $r/4$ . Тем самым, коэффициент гомотетии равен  $-R/(r/4) = -\frac{4R}{r}$ .

6) Так как  $E_1$  – ортоцентр треугольника  $M'_AM'_BM'_C$ , то  $E_1$  и  $H$  – соответствующие точки гомотетичных треугольников  $M'_AM'_BM'_C$  и  $ABC$ . Значит,  $G$  лежит на отрезке  $HE_1$  и делит его в отношении  $HG : GE_1 = 4R : r$ . Имеем  $\overline{E_1G} = \frac{r}{4R+r}$ , таким образом,  $G$  получается из точки  $H$  гомотетией с коэффициентом  $\frac{r}{4R+r}$  и центром в точке  $E_1$ . При этом, как мы показали,  $E_1$  неподвижна при «вращении» треугольника Понселе.

Теперь после всей проведенной работы уже несложно получить описание траектории точки  $G$  (рис.10): она движется (синх-

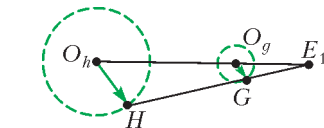


Рис. 10

ронно с точкой  $H$ ) по окружности радиуса  $\frac{r(R-2r)}{4R+r}$  с центром в точке  $O_g$  такой, что  $\overline{E_1O_g} = \frac{r}{4R+r} \overline{E_1O_h}$ .

**Упражнение 4\*.** Докажите, что окружности  $\Omega, \omega$  и траектория точки  $G$  соосны, т.е. имеют общую радикальную ось.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Этот факт доказан в статье А.Заславского, Д.Косова и М.Музафарова.

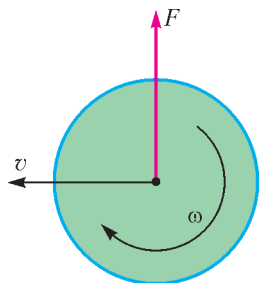
# Эксперименты с эффектом Магнуса

**А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ, П.ПАНОВ**

**Э**ФФЕКТ МАГНУСА ПРОЯВЛЯЕТСЯ ПРИ быстром движении в жидкости или газе сильно закрученного тела – его траектория оказывается искривленной по сравнению с движением без вращения.

Немецкий физик Густав Магнус проводил свои эксперименты с вращающимися цилиндрами, обдувая их потоком воздуха. Он обнаружил, что в этом случае на цилиндр, кроме силы сопротивления, действует еще одна сила, перпендикулярная потоку. Эта сила называется теперь силой Магнуса, и именно она отвечает за искривление траекторий вращающихся тел. Магнус опубликовал свои результаты в 1852 году.

Аналогичное происходит и в том случае, когда вращающееся тело движется



*Рис. 1. Сила Магнуса перпендикулярна скорости поступательного движения вращающегося шара или цилиндра*

поступательно в покоящейся среде. На рисунке 1 сила Магнуса обозначена  $F$ , она перпендикулярна поступательной скорости движения тела  $v$ , угловая скорость тела обозначена  $\omega$ . При изменении направления вращения тела сила Магнуса меняет свое направление на противоположное.

Существуют два многочисленных семейства быстро движущихся поступательно и одновременно быстро вращающихся предметов – это различного рода мячи, используемые в спортивных играх, а также артиллерийские снаряды и пули. Так что эффект Магнуса задолго до

появления работ ученого наблюдали многие спортсмены и артиллеристы. Но и не только они.

Исаак Ньютон обнаружил это явление, наблюдая за полетом закрученных теннисных мячей во дворе Тринити-колледжа, и попытался использовать его для объяснения преломления света. Размышления Ньютона по этому поводу были опубликованы в 1672 году.

Военный инженер Бенджамин Робинс обнаружил и исследовал искривление траекторий пуль и артиллерийских снарядов и связал это с их вращательным движением. Этот результат был опубликован Робинсом в 1742 году в его книге «Новые принципы артиллерии» (New Principles of Gunnery).

В 1878 году лорд Рэлей (Дж. Стретт) опубликовал свой расчет силы Магнуса для цилиндра, она оказалась пропорциональной  $v\omega$  – произведению поступательной и угловой скоростей. Далекое идиущим обобщением этого результата является фундаментальная теорема аэродинамики – теорема Кутты-Жуковского, позволяющая рассчитать подъемную силу крыла самолета.

Об эффекте Магнуса хорошо и подробно написано в статье Л.Прандтля «Эффект Магнуса и ветряной корабль». Она опубликована в журнале «Успехи физических наук» (1925 г., №5) и доступна на сайте этого журнала. Также мы рекомендуем книгу Т.Кармана «Аэродинамика», изданную на русском языке (2001 г.).

Теперь перейдем к самим экспериментам.

**Летающие стаканчики.** Возьмите пару бумажных или пластиковых стаканчиков, поставьте их друг к другу доньшками и скрепите скотчем (рис.2). Для запуска такого летательного аппарата понадобится достаточно длинная тонкая резинка, ее можно связать из нескольких канцелярских резинок. Теперь нужно два или три раза с хорошим натяжением обмотать резинку вокруг сдвоенных стаканчиков по линии склейки и запустить их, как из рогатки. На рисунке 3 изображена типичная траектория таких стаканчиков. Если не знать, что стаканчики закручены и что на них действует



Рис. 2. Сдвоенные стаканчики

сила Магнуса, поверить в такое движение невозможно!

Чтобы сделать явной эту закрутку, мы взяли пару прозрачных стаканчиков, прикрепили к ним светодиод с батарейкой и в темноте с большой выдержкой сняли их полет – фотография представлена на рисунке 4. Можно заметить, что из-за сопротивления воздуха угловая скорость вращения стаканчиков падает и вместе ней уменьшается сила Магнуса, действующая на стаканчики.

Сила Магнуса во многом похожа на подъемную силу, действующую на крыло самолета. Подъемная сила тоже перпендикулярна направлению движения самолета, и бумажные самолетик, на которые она действует, тоже делают петли в воздухе. Как рассчитать



Рис. 3. Стаканчики в полете



Рис. 4. Прозрачные стаканчики со встроенным светодиодом

траекторию летательного аппарата, на который действует подъемная сила, было рассказано в «Кванте» в статье «Планер Жуковского и движение в скрещенных полях» (2016 г., №1). Тот же самый метод можно применить и для расчета траектории летающих стаканчиков, на которые действует сила Магнуса.

Летающие стаканчики мы впервые увидели на замечательном youtube-канале Home-Made Science with Bruce Yeany. Там лежит замечательный ролик Cup Flyers, с демонстрацией полетов. Обязательно посмотрите его и сами научитесь запускать эти стаканчики.

#### Пилотируемая полоска и Большой Рот.

Мы уже говорили, что сила трения замедляет вращение стаканчиков и сила Магнуса перестает поддерживать их в полете. Но существуют летательные объекты, способные самостоятельно сохранять скорость своего вращения – авторотировать. Простейший из них – прямоугольная полоска бумаги. Свободно отпущенная, она при определенных условиях самостоятельно демонстрирует вращательное движение вокруг своей длинной оси. Н.Е.Жуковский заметил, что на такую полоску в полете действует сила Магнуса.

Недавно появившиеся игрушки – Пилотируемая полоска и Большой Рот (рис.5) – обладают улучшенными летными качествами. Пилотируемая полоска представляет со-



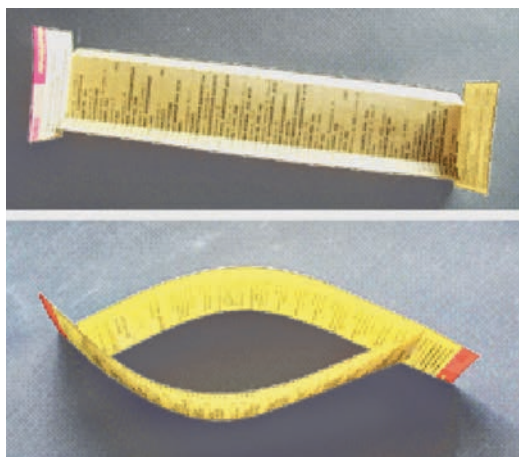


Рис. 5. Пилотируемая полоска и Большой Рот

бой прямоугольник из тонкой бумаги, снабженный четырьмя крылышками, а Большой Рот просто склеен из двух бумажных полосок. Их траектории изображены на рисунке 6. Видно, что они устойчиво авторотируют, а их полет поддерживается силой Магнуса. Эти игрушки можно пилотировать, т.е. заставить их летать неограниченное время и при этом совершать повороты и изменять высоту полета. Подробности – в «Кванте» в статьях «Пилотируемая полоска» (2013 г., №4) и «Большой Рот в полете» (2016 г., №2).

**Поющая линейка.** На этот раз для демонстрации эффекта Магнуса мы предлагаем

использовать обычную деревянную линейку длиной 30 сантиметров. Такая линейка тоже способна авторотировать – самостоятельно закручиваться под действием набегающего потока воздуха. На одном из концов линейки нужно будет проделать дырку, продеть туда прочную нитку и завязать, а потом раскрутить линейку перед собой. Линейка перейдет в режим авторотации и начнет вращаться вокруг своей оси – это можно увидеть по траектории светодиода, прикрепленного к концу линейки. Значит, на линейку будет действовать сила Магнуса, которая выведет ее из вертикальной плоскости и заставит двигаться по поверхности некоторого конуса. При изменении направления авторотации на противоположное сила Магнуса тоже поменяет свое направление, и конус окажется расположенным по другую сторону вертикальной плоскости. Эти два конуса хорошо видны на рисунке 7. Обращение авторотации происходит само собой – из-за периодически возрастающей закрутки нити.

При вращении линейка издает низкий вибрирующий звук, и на этом принципе устроено множество архаичных музыкальных инструментов, принадлежащих разным эпохам и народам. Сейчас эти инструменты объединены общим названием «bullroarer», а самый древний из найденных датируется 17 веком до н.э. Так что музыканты верхнего



Рис. 6. Пилотируемая полоска и Большой Рот в полете





Рис. 7. Два конуса авторотирующей линейки

палеолита наверняка тоже были знакомы с эффектом Магнуса.

Эту музыку вы сможете услышать, когда закрутите линейку и она начнет авторотировать, а увидеть эту музыку можно прямо сейчас. Мы записывали звук, расположив вблизи траектории светодиода микрофон, как на рисунке 7, но можно воспользоваться и мобильным телефоном.

На рисунке 8 в координатах время-громкость изображена 32-х секундная звуковая запись и два ее фрагмента – один с 16,6 до 20,2 секунды, другой с 18,12 до 18,42 секунды. На записи четко выделяются восемь звуковых групп, каждая продолжительностью 4 секунды. Они соответствуют вращению линейки вдоль одного или другого конуса. Обратите внимание на амплитуды звука в соседних группах – большие чередуются с малыми. Это потому, что один конус был расположен ближе к микрофону мобильного. Далее на рисунке представлен временной интервал 16,6–20,2 секунды, вмещающий в себя пятую группу. Высокие пики соответствуют прохождению линейки вблизи микрофона. Видно, что период обращения линейки вдоль конуса составляет чуть

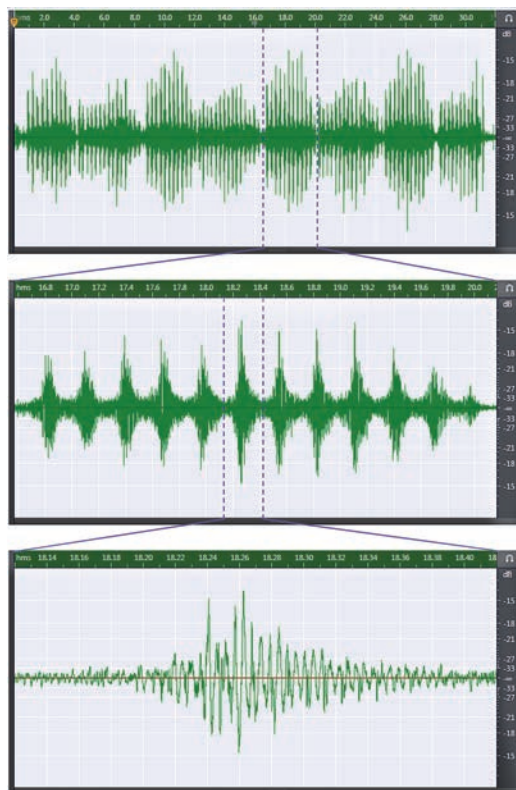


Рис. 8. Звуковая запись и ее фрагменты

меньше 0,3 секунды. Еще мы выделили интервал 18,12–18,42 секунды, вмещающий шестой пик из пятой группы. Составляющие его узкие пички следуют с интервалом порядка 0,005 секунды, что соответствует удвоенной частоте вращения линейки вокруг своей длинной оси.

Под конец добавим еще несколько видео, на которых ученые увлекательно рассказывают об эффекте Магнуса.

- What Is The Magnus Force? на канале Veritasium  
<https://www.youtube.com/watch?v=23fjvGUWJs>
- Surprising Applications of the Magnus Effect на канале Veritasium  
<https://www.youtube.com/watch?v=2OSrvzNW9FE>
- Coanda, Bernoulli and Magnus Effects на канале Fizzics.org  
<https://www.fizzics.org/physics-notes-and-video-lessons/free-physics-video-lessons/fluid-flow-video-lessons>

# Загадка целых углов

К.КНОП

**ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА.** ДАН ТРЕУГОЛЬНИК  $ABC$  с углами  $\angle A = 32^\circ$  и  $\angle B = 50^\circ$ . Внутри него взята такая точка  $D$ , что  $\angle DAB = 10^\circ$ , а  $\angle DBA = 24^\circ$  (рис. 1). Чему равен угол  $BDC$ ?

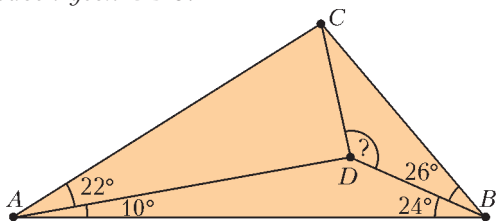


Рис. 1

Не знаю, как вас, но автора подобная постановка вопроса обычно вгоняет в ступор. В каком виде должен быть получен ответ? Неужели «арксинус чего-нибудь»? Или предполагается, что этот угол можно выразить в градусах?

А что вы скажете, если автор заявит, что ответ в этой задаче выражен целым числом градусов благодаря свойствам правильного пятиугольника? Казалось бы, какое отношение к пятиугольнику имеют углы  $32^\circ$ ,  $50^\circ$  или  $10^\circ$ ? Тем не менее, как мы вскоре увидим, это так, и автор берется это доказать.

Но для начала приведем нестрогое решение – просто чтобы найти ответ. Ведь гораздо легче что-то доказывать, зная, что именно ты хочешь доказать.

Введем обозначения:  $CA = x$ ,  $CB = y$ ,  $CD = z$ . Эти три величины связаны тремя теоремами синусов – в треугольниках  $ACD$ ,  $BCD$  и  $ABC$ . Выпишем их как систему:

$$\begin{cases} \frac{z}{\sin 22^\circ} = \frac{x}{\sin \angle ADC}, \\ \frac{z}{\sin 26^\circ} = \frac{y}{\sin \angle BDC}, \\ \frac{x}{\sin 50^\circ} = \frac{y}{\sin 32^\circ}. \end{cases}$$

Исключим из системы сначала  $z$ :

$$\begin{cases} \frac{x \sin 22^\circ}{\sin \angle ADC} = \frac{y \sin 26^\circ}{\sin \angle BDC}, \\ \frac{x}{\sin 50^\circ} = \frac{y}{\sin 32^\circ}, \end{cases}$$

а потом  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\sin 50^\circ \sin 22^\circ}{\sin \angle ADC} = \frac{\sin 32^\circ \sin 26^\circ}{\sin \angle BDC}.$$

Теперь, зная сумму  $\angle ADC + \angle BDC = 360^\circ - \angle ADB = 214^\circ$ , выразим  $\angle ADC$  через  $\angle BDC$  и подставим:

$$\frac{\sin(214^\circ - \angle BDC)}{\sin \angle BDC} = \frac{\sin 50^\circ \sin 22^\circ}{\sin 32^\circ \sin 26^\circ}. \quad (1)$$

Раскрывая  $\sin(214^\circ - \angle BDC)$  по формуле синуса разности и сразу сокращая со знаменателем, получим

$$\begin{aligned} \sin 214^\circ \operatorname{ctg} \angle BDC - \cos 214^\circ &= \\ &= \frac{\sin 50^\circ \sin 22^\circ}{\sin 32^\circ \sin 26^\circ}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \angle BDC &= \\ &= \left( \frac{\sin 50^\circ \sin 22^\circ}{\sin 32^\circ \sin 26^\circ} + \cos 214^\circ \right) : \sin 214^\circ. \end{aligned}$$

Осталось получить численное значение. Берем калькулятор и, не забыв установить режим «градусы», считаем. Получаем  $\operatorname{ctg} \angle BDC \approx -0,72654$ . Вычисляем обратную величину (это тангенс угла) и берем от нее арктангенс. Ответ ошарашивает:  $-54^\circ$ . Угол  $BDC$  должен быть положительным и тупым, значит, правильный ответ  $-54^\circ + 180^\circ = 126^\circ$  – это понятно. Непонятно, почему ответ (в градусах) целый!

Для математика такая непонятность сродни красной тряпке для быка. В результате действий с синусами каких-то углов вдруг получается целая величина.

Хорошо, давайте попробуем строго доказать, что результат должен быть именно таким, как мы вычислили приближенно. Подставим  $\angle BDC = 126^\circ$  в (1) – нам нужно доказать следующее:

$$\frac{\sin(214^\circ - 126^\circ)}{\sin 126^\circ} = \frac{\sin 50^\circ \sin 22^\circ}{\sin 32^\circ \sin 26^\circ},$$

или, иначе говоря,

$$\sin 32^\circ \sin 26^\circ \sin 88^\circ = \sin 50^\circ \sin 22^\circ \sin 126^\circ. \quad (2)$$

Прояснилось ли что-то? Едва ли... Здесь шесть углов, совершенно никак между собой не связанных – ни на первый взгляд, ни на второй... Можно заметить, что 88 в четыре раза больше, чем 22, и попытаться два раза подряд применить формулу синуса двойного угла, но это все равно ни к чему хорошему не приводит. А что же делать?

Здесь помогает формула преобразования произведения синусов в сумму. Для двух синусов эта формула известна из школы – а мы применим аналогичную формулу для трех синусов:

$$\begin{aligned} 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= \\ &= \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \\ &\quad + \sin(-\alpha + \beta + \gamma) + \sin(-\alpha - \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Доказать (да и запомнить) эту формулу совсем не сложно. Оставим это читателям в качестве упражнения.

Применим эту формулу к обеим частям равенства (2), предварительно умножив их на 4. Доказываемое равенство перейдет в равносильное:

$$\begin{aligned} \sin(-30^\circ) + \sin 94^\circ + \sin 82^\circ + \sin(-146^\circ) &= \\ = \sin(-54^\circ) + \sin 154^\circ + \sin 98^\circ + \sin(-198^\circ). \end{aligned}$$

Сведем все углы к интервалу  $[0; 90^\circ]$  с помощью формул приведения (заметим, что синусы  $82^\circ$  и  $98^\circ$  сокращаются:  $82^\circ + 98^\circ = 180^\circ$ ):

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ + \sin 86^\circ &= \\ = \sin 18^\circ + \sin 26^\circ + \sin 30^\circ + \sin 34^\circ. \end{aligned} \quad (3)$$

Стало ли равенство проще? Несомненно! Во-первых, здесь появились три «хороших» угла – это не только  $30^\circ$ , синус которого все знают, но и углы  $18^\circ$  и  $54^\circ$ , значения тригонометрических функций которых известны хуже, но тем не менее их можно сосчитать (в радикалах) точно, а не приближенно. А вот что делать с остальными тремя углами? Что это за звери такие  $\sin 26^\circ$ ,  $\sin 34^\circ$ ,  $\sin 86^\circ$ ? Давайте снова призовем на помощь калькулятор и сосчитаем хотя бы с его помощью:

$$\begin{aligned} \sin 26^\circ &\approx 0,4384, \quad \sin 34^\circ \approx 0,5592, \\ \sin 86^\circ &\approx 0,9976. \end{aligned}$$

У нас получилось, что  $\sin 86^\circ \approx \sin 26^\circ +$

$+\sin 34^\circ$ ! И в самом деле:

$$\begin{aligned} \sin 26^\circ + \sin 34^\circ &= 2 \sin \frac{26^\circ + 34^\circ}{2} \sin \frac{34^\circ - 26^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 30^\circ \cos 4^\circ = \cos 4^\circ = \sin 86^\circ. \end{aligned}$$

Тем самым, все «плохие» углы в формуле (3) сокращаются. Остается значительно более простое равенство:

$$\sin 54^\circ = \sin 18^\circ + \sin 30^\circ.$$

Формула суммы синусов здесь не срабатывает:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ + \sin 30^\circ &= 2 \sin \frac{18^\circ + 30^\circ}{2} \sin \frac{30^\circ - 18^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 24^\circ \sin 6^\circ. \end{aligned}$$

Попробуем перенести  $\sin 18^\circ$  влево и применить формулу разности синусов:

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ - \sin 18^\circ &= 2 \sin \frac{54^\circ - 18^\circ}{2} \cos \frac{54^\circ + 18^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ. \end{aligned}$$

Уже «теплее»:  $36^\circ$  вдвое больше, чем  $18^\circ$ . Если домножить последнее выражение на  $2 \cos 18^\circ$ , то оно успешно «свернется»:

$$\begin{aligned} 4 \cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ &= \\ = 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ &= \sin 72^\circ. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ - \sin 18^\circ &= \\ = \frac{\sin 72^\circ}{2 \cos 18^\circ} &= \frac{\sin 72^\circ}{2 \sin 72^\circ} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ. \end{aligned}$$

Ура! Формула (3) полностью доказана, а с ней (поскольку все переходы были равносильными) решена исходная задача.

**Время собирать камни.** Что стоит делать после того, как задача решена? Конечно, речь не о том, чтобы записать решение в тетрадку и правильно оформить его. Самым важным действием является *исследование* решения, которое можно начинать только после того, как задача решена. Дьердь Пойа в своей замечательной книге «Как решать задачу» сформулировал это в виде вопроса: «Какие еще результаты можно получить на том же пути?» Такая постановка вопроса побуждает к размышлению над тем, что же, собственно, было сделано для решения задачи и почему этот путь привел к успеху.

Вопрос о поиске других результатов на том же пути – это ключевой вопрос для любого исследователя и просто пытливого человека. Жаль, что этого почти не происходит в школе. Мы же попробуем продвинуться по этому пути.

Теперь, когда мы не просто знаем ответ, но и умеем его доказывать, попробуем подойти к основной задаче более осмысленно. Для начала вместо неизвестного угла при вершине  $D$  отобразим (рис.2) значения двух углов при вершине  $C$ , каждый из которых тоже

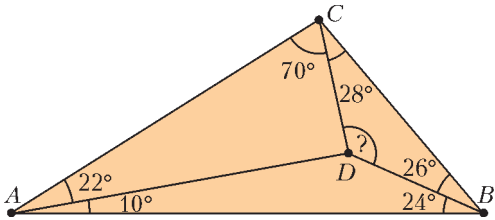


Рис. 2

изначально был неизвестен (хотя известна их сумма – она равна  $180^\circ - 32^\circ - 50^\circ = 98^\circ$ ).

Какую теорему можно сформулировать для такого чертежа? Ответ почти очевиден: известны углы, задающие «направления» на точку  $D$ , и доказывать в такой ситуации можно только одно: что три этих направления пересекаются в одной точке. Необходимое и достаточное условие пересечения трех отрезков внутри треугольника в одной точке хорошо известно – это *теорема Чевы*.<sup>1</sup> Нам сейчас окажется полезной ее тригонометрическая форма: *лучи, выпущенные под данными углами из вершин треугольника, пересекаются в одной точке (точка  $D$ ) тогда и только тогда, когда эти углы удовлетворяют условию*

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} \cdot \frac{\sin \angle CBD}{\sin \angle ABD} \cdot \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle BCD} = 1.$$

В нашей задаче теорема Чевы заставляет нас проверить (доказать) следующее равенство:

$$\sin 10^\circ \sin 70^\circ \sin 26^\circ = \sin 22^\circ \sin 28^\circ \sin 24^\circ.$$

Это не совсем то, что мы проверяли выше, хотя в чем-то сильно похоже. Но раз путь

уже известен, пройдем по нему еще раз. Домножаем на 4 и преобразовываем в две суммы четырех синусов:

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ + \sin 86^\circ + \sin(-34^\circ) + \sin(-106^\circ) = \\ = \sin 26^\circ + \sin 18^\circ + \sin 30^\circ + \sin(-74^\circ). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\sin(-106^\circ)$  и  $\sin(-74^\circ)$  сразу сокращаются, а остальные углы – наши старые знакомые: мы уже знаем, что  $\sin 86^\circ = \sin 26^\circ + \sin 34^\circ$ , а  $\sin 54^\circ = \sin 18^\circ + \sin 30^\circ$ . Случайны ли эти два равенства или они выражают какие-то скрытые пока от нас закономерности?

Начнем со второго. Выше мы его уже доказали с помощью домножения на  $2 \cos 18^\circ$ . Приведем другое доказательство, придающее этому равенству геометрический смысл.

**Задача.** *Диагонали  $AC$  и  $BD$  правильного пятиугольника  $ABCDE$  пересекаются в точке  $F$  (рис.3). Докажите, что  $AF = FD$  и эти отрезки равны стороне пятиугольника.*

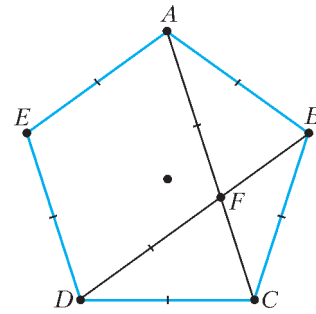


Рис. 3

**Решение.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  правильного пятиугольника параллельны его сторонам  $DE$  и  $EA$  соответственно, поэтому  $AFDE$  – параллелограмм. А так как  $DE = EA$ , то это ромб.

Как эта задача связана с синусами углов? А вот как. Поскольку  $AC = AF + FC$ , мы доказали, что

$$1 + \frac{FC}{FD} = \frac{FD + FC}{FD} = \frac{AF + FC}{FD} = \frac{AC}{FD} = \frac{AD}{FD}.$$

Но из равнобедренного треугольника  $FDC$

видно, что  $\frac{FC}{FD} = 2 \sin \frac{\angle FDC}{2}$ , а из равнобедренного треугольника  $AFD$  – что

<sup>1</sup> См., например, задачи 5.77 и 5.86 в книге В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии».

$\frac{AD}{FD} = 2 \sin \frac{\angle AFD}{2}$ . Осталось заметить, что  $\angle FDC = 36^\circ$ ,  $\angle AFD = 108^\circ$ , а  $1 = 2 \sin 30^\circ$ , т.е. мы доказали, что  $2 \sin 30^\circ + 2 \sin 18^\circ = 2 \sin 54^\circ$ .

Вернемся к равенству  $\sin 86^\circ = \sin 26^\circ + \sin 34^\circ$ . Есть ли геометрический смысл в нем? Конечно! Но для этого нам придется отказаться от конкретных величин углов. Обозначим угол  $26^\circ$  буквой  $\alpha$ . Тогда  $34^\circ$  – это  $60^\circ - \alpha$ , а  $86^\circ$  – это  $60^\circ + \alpha$ . Равенство

$$\sin(60^\circ + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha)$$

выглядит, может быть, и не очень естественно, но его тригонометрическое доказательство не представляет никаких сложностей (почти дословно повторяет выписанное выше для  $\alpha = 26^\circ$ ). Можно доказать его и чисто геометрически. Рассмотрим правильный треугольник  $ABC$ , в котором на стороне  $BC$

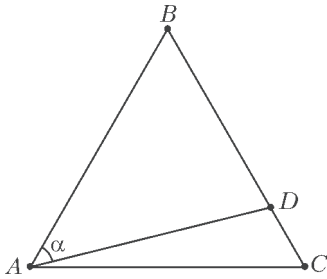


Рис. 4

взята точка  $D$  так, что  $\angle BAD = \alpha$  (рис.4). Тогда  $\angle CAD = 60^\circ - \alpha$ ,  $\angle ADC = 60^\circ + \alpha$ . Требуемое равенство получается применением теоремы синусов в треугольниках  $ABD$  и  $ACD$ .

Итак, мы прошли по тому же пути решения еще один раз. Увидели и связь со свойствами правильного пятиугольника, и какие-то еще полезные закономерности. Все? Конечно, нет. Путешествие за новыми результатами на том же пути сейчас только начинается.

Попробуем понять, какими еще могут быть шесть углов при вершинах треугольника, чтобы применение теоремы Чевы и преобразования произведения синусов в сумму приводило к успеху – к целочисленному ответу в градусах. Для начала перепишем равен-

ство (4), заменим  $26^\circ$  на  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ + \sin(60^\circ + \alpha) + \\ + \sin(\alpha - 60^\circ) + \sin(-106^\circ) = \\ = \sin \alpha + \sin 18^\circ + \sin 30^\circ + \sin(-74^\circ). \end{aligned}$$

Сравним это с формулой произведения трех синусов: ведь для того чтобы такое равенство возникало, оно должно получаться применением этой формулы. В той формуле сумма четырех величин, синусы которых складываются, равна нулю. Значит, и здесь должно быть так же. Иначе говоря, прежде чем обобщать равенство (4), нужно заменить в нем  $-74^\circ$  на  $-(\alpha + 18^\circ + 30^\circ)$ , а  $-106^\circ$  на  $-(54^\circ + (60^\circ + \alpha) + (\alpha - 60^\circ)) = -(54^\circ + 2\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ + \sin(60^\circ + \alpha) + \sin(\alpha - 60^\circ) + \\ + \sin(-54^\circ - 2\alpha) = \\ = \sin \alpha + \sin 18^\circ + \sin 30^\circ + \sin(-48^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

Кроме того, когда мы захотим вернуться к произведению синусов, нам будет нужно, чтобы шесть полученных углов вместе составляли три угла некоторого треугольника, т.е. чтобы их сумма была равна  $180^\circ$ . Нетрудно сосчитать, что шесть углов – это  $\alpha$ ,  $\alpha/2 - 3^\circ$ ,  $\alpha/2 + 57^\circ$ ,  $24^\circ$ ,  $\alpha/2 + 15^\circ$  и  $\alpha/2 + 9^\circ$ , поэтому должно выполняться равенство  $3\alpha + 102^\circ = 180^\circ$ , откуда  $\alpha = 26^\circ$  – оказывается, угол  $26^\circ$  был совсем не с потолка взят!

Что же получается – есть единственная такая шестерка углов в градусах и нет никаких других вариантов? Стоп. Пройдем медленно по тому же пути – разберемся, что мы делали и как. Мы складывали синусы трех углов с параметром  $\alpha$  ( $\alpha$ ,  $60^\circ + \alpha$ ,  $\alpha - 60^\circ$ ) и синусы трех других фиксированных углов ( $18^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $30^\circ$ ). В одну тройку с углом  $54^\circ$  входили два угла  $60^\circ + \alpha$  и  $\alpha - 60^\circ$ , а в другую тройку – углы  $18^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $\alpha$ . После этого все действительно уже оказывалось детерминированным: мы находили суммы углов в каждой тройке и выбирали  $\alpha$  так, чтобы сумма двух этих сумм была равна  $180^\circ$ . Тогда и четвертые синусы слева и справа сократятся, и сумма всех шести углов в треугольнике будет ровно такой, как нужно.

Но ведь вместо угла  $54^\circ$  может стоять и



угол  $180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$ . Тогда равенство должно быть примерно таким:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ + \sin 30^\circ + \sin \alpha &= \\ &= \sin 126^\circ + \sin(\alpha - 60^\circ) + \sin(\alpha + 60^\circ). \end{aligned}$$

Теперь общая сумма углов слева равна  $48^\circ + \alpha$ , справа  $126^\circ + 2\alpha$ . Общая сумма,  $174^\circ + 3\alpha$ , должна быть равна  $180^\circ$ , откуда  $\alpha = 2^\circ$ . При этом формула примет вид

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ + \sin 30^\circ + \sin 2^\circ &= \\ &= \sin 126^\circ + \sin(-58^\circ) + \sin 62^\circ. \end{aligned}$$

Добавим четвертые слагаемые:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ + \sin 30^\circ + \sin 2^\circ + \sin(-50^\circ) &= \\ &= \sin 126^\circ + \sin(-58^\circ) + \sin 62^\circ + \sin(-130^\circ). \end{aligned}$$

После обратного преобразования в произведение синусов получим новое тождество для использования в теореме Чевы:

$$\sin 16^\circ \sin 10^\circ \sin 24^\circ = \sin 2^\circ \sin 34^\circ \sin 94^\circ.$$

А как именно по этому тождеству «восстановить» исходный треугольник? Ответ такой: это можно сделать шестью разными способами. Действительно, углы  $10^\circ$ ,  $16^\circ$  и  $24^\circ$  нужно отложить через один (порядок не важен), а вторую тройку углов – расставить любым из  $3! = 6$  возможных способов на оставшиеся свободными 3 места.

А что будет, если тот же трюк с заменой острого угла тупым использовать не для угла  $54^\circ$ , а для угла  $18^\circ$ ? Получим

$$\begin{aligned} \sin 162^\circ + \sin 30^\circ + \sin \alpha &= \\ &= \sin 54^\circ + \sin(\alpha - 60^\circ) + \sin(\alpha + 60^\circ). \end{aligned}$$

Тогда должно быть  $162^\circ + 30^\circ + \alpha + 54^\circ + 2\alpha = 180^\circ$ , откуда  $\alpha = -22^\circ$ . Далее получается, что в левую часть нужно добавлять  $\sin(-170^\circ)$ , а в правую –  $\sin(-10^\circ)$ . Вроде бы все в порядке – но после преобразования в произведение два множителя оказываются отрицательными:

$$\begin{aligned} \sin 4^\circ \sin 70^\circ \sin 96^\circ &= \\ &= \sin(-22^\circ) \sin 46^\circ \sin(-14^\circ). \end{aligned}$$

Что это значит? Вообще-то, конечно, в теореме Чевы вполне могут быть отрицательные углы, но это означает, что точка  $D$  оказывается не внутри треугольника  $ABC$ , а снаружи.

Напоследок – еще несколько идей, позволяющих «размножить» эту конструкцию.

**Идея 1.** Перенесем один из углов в другую часть с отрицательным знаком. Например, так:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ + \sin(\alpha - 60^\circ) + \sin(\alpha + 60^\circ) &= \\ &= \sin 54^\circ + \sin(-30^\circ) + \sin \alpha. \end{aligned}$$

Уравнение для подбора  $\alpha$ :  $18^\circ + 2\alpha + 24^\circ + \alpha = 180^\circ$ ;  $\alpha = 46^\circ$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ + \sin(-14^\circ) + \sin 106^\circ + \sin(-110^\circ) &= \\ &= \sin 54^\circ + \sin(-30^\circ) + \sin 46^\circ + \sin(-70^\circ); \end{aligned}$$

$$\sin 2^\circ \sin 46^\circ \sin 62^\circ = \sin 8^\circ \sin 12^\circ \sin 50^\circ.$$

**Идея 2.** Вместо равенства  $\sin(60^\circ + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha)$  использовать что-нибудь попроще. Например, вот такое:

$$\sin 0^\circ + \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Тогда мы должны сгруппировать  $(0^\circ, 54^\circ, \alpha)$  и  $(18^\circ, 30^\circ, \alpha)$  и подобрать  $\alpha$  так, чтобы сумма всех шести углов была  $180^\circ$ . Решая уравнение  $18^\circ + 30^\circ + 54^\circ + 2\alpha = 180^\circ$ , находим  $\alpha = 39^\circ$ . Преобразовывая обратно в произведение, получаем равенство с углами, кратными  $0,5^\circ$ :

$$\begin{aligned} \sin 19,5^\circ \sin 27^\circ \sin 46,5^\circ &= \\ &= \sin 24^\circ \sin 28,5^\circ \sin 34,5^\circ. \end{aligned}$$

**Идея 3.** Вместо равенства  $\sin 54^\circ = \sin 18^\circ + \sin 30^\circ$  использовать такую его разновидность:

$$\sin 54^\circ + \sin 30^\circ = \sin 18^\circ + \sin 90^\circ$$

(ибо  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , а  $\sin 90^\circ = 1$ ). В сочетании с добавлением двух равных углов, а также переносами углов в противоположную часть со сменой знака мы получаем еще несколько вариантов.

**Идея 4.** Опереться на равенство

$$\sin 30^\circ + \sin 78^\circ = \sin 42^\circ + \sin 54^\circ$$

(докажите его!), а дальше снова применить идею 2 с добавлением двух равных углов.

**Идея 5.** Опереться на еще одно замечательное равенство

$$\sin 66^\circ = \sin 6^\circ + \sin 18^\circ + \sin 30^\circ.$$

Здесь снова помогают и добавление равных

углов, и перенос в другую часть, и замена угла  $66^\circ$  на смежный с ним ( $114^\circ$ ).

**Идея 6.** Правильный пятиугольник может помочь намного больше. В частности, он помогает доказать вот такую замечательную формулу:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin(\alpha + 72^\circ) + \sin(\alpha - 72^\circ) &= \\ &= \sin(\alpha + 36^\circ) + \sin(\alpha - 36^\circ). \end{aligned}$$

Если в этой формуле перенести один из углов (например,  $\alpha - 72^\circ$ ) в правую часть, а в левую добавить  $\sin 0^\circ$ , то дальше можно действовать так же, как и везде выше: подобрать  $\alpha$  так, чтобы сумма всех углов была равна  $180^\circ$ .

### Упражнения

1. Докажите, что

$$\sin 4^\circ \sin 38^\circ \sin 64^\circ = \sin 10^\circ \sin 18^\circ \sin 46^\circ.$$

2. Докажите, что

$$\sin 3^\circ \sin 39^\circ \sin 75^\circ = \sin 9^\circ \sin 24^\circ \sin 30^\circ.$$

3. Докажите геометрически, что

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin(30^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) &= \\ &= \sin \alpha \sin 30^\circ \sin(60^\circ - 2\alpha) \end{aligned}$$

при любом  $\alpha$ .

*Указание.* Постройте треугольник и точку внутри него, для которых нужные произведения синусов будут получаться из теоремы Чевы.

4. Докажите геометрически, что

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha \sin(30^\circ - 2\alpha) \sin 30^\circ &= \\ &= \sin 2\alpha \sin(15^\circ - \alpha) \sin(105^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

при любом  $\alpha$ .

5. Докажите, что

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin(90^\circ - 3\alpha) \sin 30^\circ &= \\ &= \sin 2\alpha \sin(30^\circ - \alpha) \sin(30^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

при любом  $\alpha$ .

6. Докажите, что

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin(60^\circ - 4\alpha) \sin(60^\circ + \alpha) &= \\ &= \sin 3\alpha \sin(30^\circ - 2\alpha) \sin(30^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

при любом  $\alpha$ .

## НАМ ПИШУТ

### Еще одно решение задачи M2401

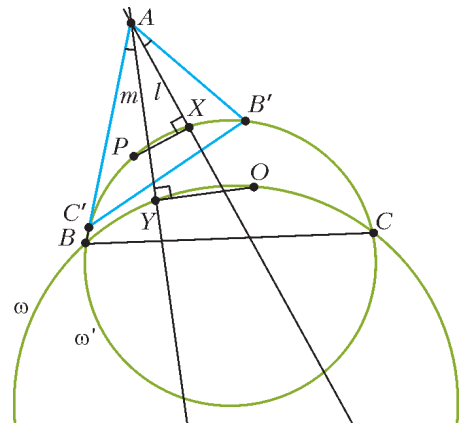
Часто бывает, что другой, новый взгляд на задачу приводит к интересным решениям и обобщениям. Так получилось и с задачей **M2401** (опубликована в «Кванте» №5–6 за 2015 г.):

*Точки  $P$  и  $Q$ , лежащие внутри треугольника  $ABC$ , таковы, что  $\angle PAB = \angle QAC$ ,  $\angle PBC = \angle QBA$ ,  $\angle PCA = \angle QCB$  (т.е. точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены). Прямые  $l$  и  $t$  проходят через точку  $A$  и симметричны относительно биссектрисы угла  $A$ . Пусть  $X$  – проекция точки  $P$  на прямую  $l$ , а  $Y$  – проекция точки  $Q$  на прямую  $t$ . Докажите, что если точки  $B, C, P, X$  лежат на одной окружности, то точки  $B, C, Q, Y$  тоже лежат на одной окружности.*

В задаче речь идет о паре изогонально сопряженных точек  $P$  и  $Q$ . В статье «Изогонально сопряженные точки» («Квант» №1 за 2016 г.) было указано несколько способов доказательства изогонального сопряжения. Одновременно эти способы могут дать идею, как работать с изогонально сопряженными точками. Для решения задачи M2401 мы используем идею из 7-го способа (изогональное сопряжение «по Богданову»).

**Решение.** Пусть окружность, проходящая через точки  $B, C, X, P$ , пересекает вторично прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $C'$  и  $B'$  (см. рисунок). Тогда треугольники  $ABC$  и  $AB'C'$  подобны, а точки  $Q$  и  $P$  – соответственные точки этих подобных треугольников (т.е. при преобразовании подобия, переводящем треугольник  $ABC$  в треугольник  $AB'C'$ , точка  $Q$  переходит в точку  $P$ ).

Действительно, пусть, например,  $B'$  и  $C'$  лежат на отрезках  $AB$  и  $AC$  (другие случаи



расположения рассматриваются аналогично). Из вписанного четырехугольника  $BCB'C'$  имеем  $\angle AB'C' = \angle ABC$ , значит,  $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ . Далее, из вписанности четырехугольника  $BPB'C'$  имеем  $\angle C'B'P = \angle C'BP = \angle ABP = \angle CBQ$ . Аналогично,  $\angle B'C'P = \angle BCQ$ , поэтому  $Q$  и  $P$  – соответственные точки треугольников  $ABC$  и  $AB'C'$ .

Значит, окружность  $\omega$ , проходящая через точки  $B, C, Q$ , и окружность  $\omega'$ , проходящая через точки  $B', C', P$ , – соответственные окружности подобных треугольников  $ABC$  и  $AB'C'$ . Прямые  $m$  и  $l$  – очевидно, соответственные прямые подобных треугольников  $ABC$  и  $AB'C'$ , значит, точки  $Y$  и  $X$  – соответственные точки этих подобных треугольников. По

условию задачи для треугольника  $AB'C'$  выполнено условие: окружность  $\omega'$  проходит через  $X$ . Значит, такое же условие выполнено для соответственных элементов треугольника  $ABC$ , т.е. окружность  $\omega$  проходит через  $Y$ . Это и требовалось доказать.

В заключение отметим, что задачу M2401 можно обобщить: вместо проекций точек  $P$  и  $Q$  на прямые  $l$  и  $m$  на прямых  $l$  и  $m$  брать произвольные точки  $X$  и  $Y$ , для которых углы  $\angle(l, PX)$  и  $\angle(QY, m)$  равны. В таком случае верен тот же факт: если точки  $B, C, P, X$  лежат на одной окружности, то точки  $B, C, Q, Y$  тоже лежат на одной окружности. Предложенное решение сохраняется и для обобщения.

Д.Прокопенко

### О «больших» факториалах

Наш читатель Н.Желваков обнаружил следующее интересное свойство, связанное с делимостью факториалов больших чисел.

Пусть  $A = \{p_1, \dots, p_n\}$  – множество  $n$  различных простых чисел.

Для каждого непустого подмножества  $B \subset A$  обозначим через  $\Pi(B)$  факториал произведения чисел множества  $B$ . Например, если  $B = \{3, 7, 11\}$ , то  $\Pi(B) = (3 \cdot 7 \cdot 11)!$ .

Для каждого натурального  $k \leq n$  обозначим через  $\Pi_k$  произведение чисел  $\Pi(B)$  по всем подмножествам  $B \subset A$ , состоящим из  $k$  элементов. Например, если  $A = \{2, 3, 5, 11\}$ , то

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= 2! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 11!, \\ \Pi_2 &= (2 \cdot 3)! \cdot (2 \cdot 5)! \cdot (2 \cdot 11)! \cdot (3 \cdot 5)! \times \\ &\quad \times (3 \cdot 11)! \cdot (5 \cdot 11)!, \\ \Pi_3 &= (2 \cdot 3 \cdot 5)! \cdot (2 \cdot 3 \cdot 11)! \cdot (2 \cdot 5 \cdot 11)! \cdot (3 \cdot 5 \cdot 11)!, \\ \Pi_4 &= (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)!. \end{aligned}$$

Тогда число  $d = \frac{\Pi_n \cdot \Pi_{n-2} \cdot \dots}{\Pi_{n-1} \cdot \Pi_{n-3} \cdot \dots}$  (в числителе и знаменателе произведение всех  $\Pi_i$ , где  $i$  пробегает все числа  $1, 2, \dots, n$ ), является целым, причем оно равно  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \cdot K$ , где  $K$  – произведение всех натуральных чисел от 1 до  $p_1 p_2 \dots p_n$ , не делящихся ни на одно из чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , а  $\alpha_i = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_n - 1)/(p_i - 1)$ .

Доказать это можно, например, так. Воспользуемся формулой Лежандра для вычисления показателя степени, в которой простое число  $p$  входит в разложение числа  $n!$ :

$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

Разобьем все подмножества (включая пустое) множества  $A$  на пары, отличающиеся одним простым числом  $p \in A$ . Рассмотрим одну из таких пар подмножеств:  $B = \{p, x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $C = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Пусть  $x = x_1 x_2 \dots x_m$ . Тогда степень вхождения этого  $p$  в выражение  $\Pi(B)/\Pi(C)$  равна

$$x + \left[ \frac{x}{p} \right] + \left[ \frac{x}{p^2} \right] + \dots - \left( \left[ \frac{x}{p} \right] + \left[ \frac{x}{p^2} \right] + \dots \right) = x.$$

Теперь нетрудно вычислить показатель, с которым простые числа из множества  $A$  входят в разложение числа  $d$ . Скажем,  $p_1$  входит в разложение  $d$  в степени  $(p_2 - 1) \dots (p_n - 1)$ .

Рассмотрим в произведении  $\Pi(A) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p_1 \dots p_n)$  любой сомножитель  $G$ , в разложении которого есть простое число, отличное от  $p_1, \dots, p_n$ . Пусть оно не взаимно просто хотя бы с одним из чисел множества  $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Представим этот сомножитель в виде  $G = q_1 q_2 \dots q_s H$ , где  $q_1, \dots, q_s$  – различные числа из множества  $A$ , а  $H$  не делится ни на одно из чисел множества  $A$ , отличных от  $q_1, \dots, q_s$ . Например, для  $A = \{2, 3, 5, 11\}$  и сомножителя  $G = 140$  кладем  $G = 2 \cdot 5 \cdot 14$ , т.е.  $q_1 = 2, q_2 = 5, H = 14$ . Сомножителю  $G$  сопоставим куст: сомножители вида  $G = q_1 q_2 \dots q_s H / (q_{i_1} \dots q_{i_k})$  в произведении  $\Pi(A \setminus \{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\})$ . Каждый куст вносит одинаковый вклад (в смысле простоты, отличных от  $p_1, \dots, p_n$ ) в числитель и знаменатель дроби  $d$ . Каждый сомножитель входит в один и только один куст. При этом не сокращаются только сомножители в произведении  $\Pi(A)$ , взаимно простые с числами  $p_1, \dots, p_n$ .

## XXXVIII Турнир городов

## Задачи осеннего тура (2016 год)

Базовый вариант

8–9 классы

1. (4)<sup>1</sup> Взяли пять натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?

М.Евдокимов

2. (4) На прямой отмечены четыре точки и еще одна точка отмечена вне прямой. Всего существует шесть треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?

Е.Бакаев

3. На окружности отмечены 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.

а) (2) Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечетными.

б) (2) Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были четными?

П.Кожевников

4. (5) Даны параллелограмм  $ABCD$  и такая точка  $K$ , что  $AK = BD$ . Точка  $M$  – середина  $CK$ . Докажите, что  $\angle BMD = 90^\circ$ .

Е.Бакаев

5. (5) Сто медвежат нашли в лесу ягоды. Самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше – 2 ягоды, следующий – 4 ягоды и так далее, а самому старшему

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.

досталось  $2^{99}$  ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса ее съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса?

Е.Бакаев

10–11 классы

1. (4) Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трехчленов со старшими коэффициентами  $p$  и  $q$ . Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно  $p + q$ ?

Н.Седракян

2. (5) См. задачу M2448 «Задачника «Кванта»».

3. (5) См. задачу 5 для 8–9 классов с вопросом: «Какое наибольшее количество ягод может съесть лиса?»

4. (5) См. задачу M2451 «Задачника «Кванта»».

5. (6) См. задачу M2447 «Задачника «Кванта»».

Сложный вариант

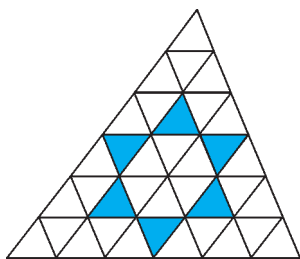
8–9 классы

1. (5) См. задачу M2446,а «Задачника «Кванта»».

2. (5) В каждой клетке доски  $8 \times 8$  написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32?

Н.Чернятьев

3. (6) Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на



рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности.

*Е. Бакаев*

4. (8) Квадратная коробка конфет разбита на 49 равных квадратных ячеек. В каждой ячейке лежит шоколадная конфета – либо черная, либо белая. За один присест Саша может съесть две конфеты, если они одного цвета и лежат в соседних по стороне или по углу ячейках. Какое наибольшее количество конфет гарантированно может съесть Саша, как бы ни лежали конфеты в коробке?

*А. Кузнецов*

5. (8) На трех красных и трех синих карточках написаны шесть положительных чисел, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то трех чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же трех чисел. Всегда ли можно гарантированно определить эти три числа?

*Б. Френкин*

6. (9) Дан правильный  $2n$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  с центром  $O$ , причем  $n \geq 5$ . Диагонали  $A_2A_{n-1}$  и  $A_3A_n$  пересекаются в точке  $F$ , а  $A_1A_3$  и  $A_2A_{2n-2}$  – в точке  $P$ . Докажите, что  $PF = PO$ .

*М. Тимохин*

7. а) (5) Группа людей прошла опрос, состоящий из 20 вопросов, на каждый из которых возможны два ответа. После опроса оказалось, что для любых 10 вопросов и любой комбинации ответов на эти вопросы существует человек, давший именно эти ответы на эти вопросы. Обязательно ли найдутся два человека, у которых ответы ни на один вопрос не совпали?

б) (6) Решите ту же задачу, если на каждый вопрос есть 12 вариантов ответа.

*И. Митрофанов, А. Канель-Белов*

*10–11 классы*

1. (5) См. задачу М2446,6 «Задачника «Кванта».

2. (5) См. задачу 2 для 8 – 9 классов.

3. (7) Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\Omega$  с центром  $O$ , причем  $O$  не лежит на диагоналях четырехугольника. Описанная окружность  $\Omega_1$  треугольника  $AOC$  проходит через середину диагонали  $BD$ . Докажите, что описанная окружность  $\Omega_2$  треугольника  $BOD$  проходит через середину диагонали  $AC$ .

*А. Заславский*

4. (8) См. задачу М2453 «Задачника «Кванта».

5. (9) См. задачу М2452 «Задачника «Кванта».

6. (9) Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя задумывает некоторый многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Далее делается несколько ходов. За ход Вася платит Пете рубль и называет любое целое число  $a$  по своему выбору, которое он еще не называл, а Петя в ответ говорит, сколько решений в целых числах имеет уравнение  $P(x) = a$ . Вася выигрывает, как только Петя два раза (не обязательно подряд) назвал одно и то же число. Какого наименьшего числа рублей хватит Васе, чтобы гарантированно выиграть?

*А. Мудгал*

7. (12) См. задачу М2449 «Задачника «Кванта».

*Публикацию подготовили  
С. Дориченко, Л. Медников*



# Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике

В Московской области муниципальный этап олимпиады прошел 18 декабря 2016 года. В нем приняли участие 4270 школьников 7–11 классов.

## Задачи олимпиады

7 класс

### Задача 1. Астрофизика

В телескоп наблюдаются два космических объекта. Известно, что один из них расположен на расстоянии 18,0 тысяч световых лет от Земли, а другой находится на расстоянии 5,50 килопарсек. Угол между видимыми направлениями на объекты 60 градусов, а расстояние между ними 1,14 млрд астрономических единиц (а.е.). Сколько световых лет содержится в 1 парсеке? Известно, что расстояние в 1 а.е. свет проходит за 500 секунд, а 1 световой год – это расстояние, которое свет проходит за 1 год.

### Задача 2. Нелинейная плотность

Исследуя плотность неизвестной жидкости, экспериментатор Глюк провел серию измерений. Поставив мерный стакан с жидкостью на весы, он сфотографировал уста-

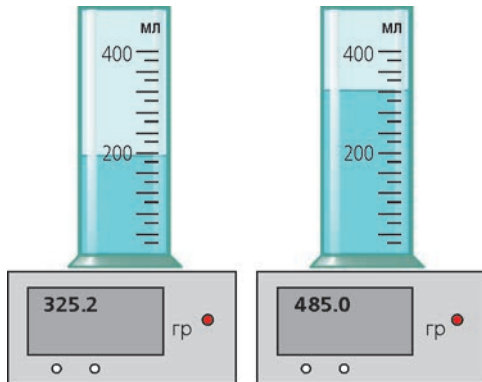


Рис. 1

новку, а затем, долив еще немного жидкости, сделал второй снимок (рис.1). Через несколько дней Глюк понял, что из-за поломки в день эксперимента показания весов были завышенными ровно на 10%. Помогите экспериментатору определить плотность неизвестной жидкости и массу пустого мерного стакана.

### Задача 3. Время относительно

Поезд проехал мост длиной  $l = 450$  м за  $t_1 = 45$  с. Охранник, стоящий на мосту, заметил, что поезд двигался мимо него в течение  $t_2 = 30$  с. Какое время ехал по мосту пассажир, сидящий в вагоне поезда? Найдите длину поезда и скорость его движения и определите, во сколько раз длина поезда больше длины моста.

### Задача 4. Туда-сюда

На графике (рис.2) приведена зависимость координаты тела, движущегося вдоль оси  $x$ , от времени. Определите максималь-

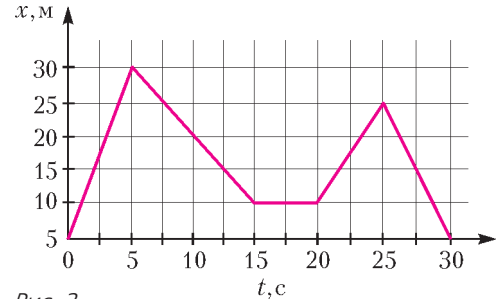


Рис. 2

ную скорость движения тела; путь, пройденный телом за 30 с; среднюю скорость тела в интервале времени от 5 с до 20 с.

8 класс

### Задача 1. Эх, дороги

Внедорожник «Нива» может проехать расстояние  $l = 39$  км от Дубны до Орудьева,

имея скорость на асфальте  $v_1 = 100$  км/ч, а на грунтовом участке  $v_2 = 25$  км/ч. Автомобиль BMW на той же дороге по асфальту разгоняется до  $v_3 = 160$  км/ч, но по грунтовке едет только со скоростью  $v_4 = 10$  км/ч. При какой длине грунтового участка время движения машин окажется одинаковым?

### Задача 2. Бодибилдинг

Один спортсмен решил привести свое тело в соответствие с пропорциями статуи Давида творения великого Микеланджело и сел на диету. Но что-то пошло не так. Если все горизонтальные размеры спортсмена оказались ровно вдвое меньше, чем у Давида, то рост остался всего лишь  $h = 170$  см, тогда как высота статуи  $H = 500$  см. Определите массу спортсмена, если масса мраморной статуи  $m = 3200$  кг. Плотность мрамора  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, средняя плотность человеческого тела  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

### Задача 3. Фарфоровый чайник

В пустой фарфоровый чайник, имеющий комнатную температуру  $t_0 = 20$  °С, налили  $m = 500$  г горячей воды при температуре  $t_1 = 80$  °С. В результате теплообмена температура чайника и его содержимого стала равной  $t_2 = 70$  °С. Затем чайник включили в сеть, и через  $\tau = 2$  мин вода в нем закипела. Определите мощность нагревателя чайника. Тепловыми потерями в окружающую среду пренебречь. Удельная теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг · °С).

### Задача 4. Уравновесим

К легкой нити, перекинутой через блок, с одной стороны прикреплен однородный рычаг, а с другой – груз, касающийся рычага и имеющий массу  $m = 6$  кг (рис.3). Определите, при какой массе рычага  $M$  система останется в равновесии. С какой силой при этом груз будет давить на рычаг? Трения в оси

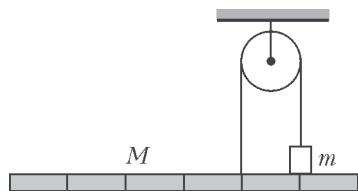


Рис. 3

блока нет. Все необходимые расстояния можно взять из рисунка. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

9 класс

### Задача 1. Вторая половина

Тележка, двигаясь из состояния покоя с постоянным ускорением, проходит расстояние  $s$  и приобретает скорость  $v = 10$  м/с. Затем, продолжая двигаться равномерно со скоростью  $v$ , она проходит еще такое же расстояние  $s$ . Определите среднюю скорость тележки за вторую половину всего времени движения.

### Задача 2. Фляжка

Металлическая фляжка имеет форму параллелепипеда. Масса заполненной водой фляжки равна  $M$ . Если фляжку положить на стол самой большой гранью, то она будет оказывать давление  $p_1$ . Если ее положить на среднюю грань, то давление будет равно  $p_2$ . Если фляжку поставить на самую маленькую грань, то давление окажется равным  $p_3$ . Чему равны масса  $m$  пустой фляжки и длины ее ребер  $a$ ,  $b$  и  $c$ ? Толщина стенок фляжки пренебрежимо мала по сравнению с длинами ее ребер. Плотность воды равна  $\rho$ .

*Примечание.* Для определенности длину короткого ребра фляжки обозначьте  $a$ , длину среднего ребра –  $b$ , длинного ребра –  $c$ .

### Задача 3. Жидкое равновесие

На легком рычаге уравновешены два цилиндра, имеющие одинаковые размеры. При первом взвешивании точка опоры делит рычаг в отношении 1 : 2, а цилиндры погружены в жидкость плотностью  $\rho$  на треть объема (рис. 4,а). Если глубину погружения увеличить вдвое, то для сохранения равновесия придется перенести точку опоры рычага влево так, что она поделит рычаг в отношении 1 : 3 (рис.4,б). Определите плотности цилиндров  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

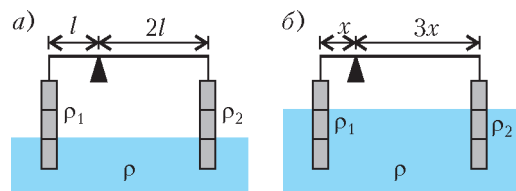


Рис. 4

**Задача 4. Чайник**

Если заполнить электрический чайник водой из-под крана, то вода в нем закипит через время  $\tau_0$  после включения. Однажды через время  $\tau_1$  ( $\tau_1 < \tau_0$ ) после включения хозяйка отлила из полного чайника немного теплой воды, тут же долила в него воды из-под крана до первоначального уровня и снова включила. На этот раз вода в чайнике закипела через время  $\tau_2$  после повторного включения. Какую часть воды  $a$  отлила хозяйка из полного чайника? Считайте, что потребляемая чайником электрическая мощность постоянна, а потерями тепла в окружающее пространство и количеством теплоты, идущим на нагревание самого чайника, можно пренебречь.

**Задача 5. Приборы в цепи**

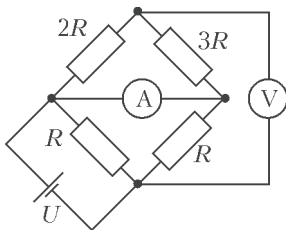


Рис. 5

Определите показания идеальных измерительных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 5. Напряжение источника  $U = 12$  В, сопротивление  $R = 1$  кОм.

10 класс

**Задача 1. Подземный переход**

Ступени лестницы имеют ширину  $a = 28$  см и высоту  $b = 15$  см. С какой максимальной установившейся скоростью  $u$  человек массой  $m = 70$  кг может идти вниз по такой лестнице (рис.6,а), наступая на каждую ступеньку? Какую среднюю мощность он должен развивать при подъеме по лестнице (рис.6,б) с этой скоростью? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

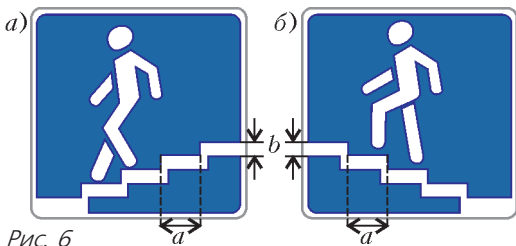
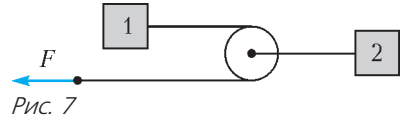


Рис. 6

**Задача 2. Ускорения тел**

Система из двух одинаковых тел, соединенных легкими нерастяжимыми нитями, покоится на горизонтальной поверхности (рис.7). Если к свободному концу нити, переброшенной через блок, приложить некоторую силу  $F$ , то он начнет движение с



ускорением  $a = 1$  м/с<sup>2</sup>. Какие ускорения  $a_1$  и  $a_2$  при этом будут иметь тела, если коэффициент трения между ними и поверхностью  $\mu = 0,2$ ? Массой блока и трением в его оси можно пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Задача 3. Перемещение грузика**

На однородной массивной балке, покоящейся на двух опорах, расположенных по краям, находится небольшой грузик (рис.8). При смещении грузика на расстояние  $l = 20$  см вдоль балки одна из сил нормальной реакции опоры изменилась на  $\Delta N = 0,2$  Н. Определите массу грузика  $m$ . Длина балки  $L = 80$  см. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

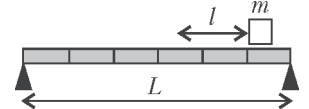


Рис. 8

**Задача 4. Увеличиваем КПД**

Если нагревать воду от комнатной температуры до температуры кипения в массивном чайнике, заполненном наполовину, то КПД процесса составит  $\eta_1 = 0,85$ . Чему станет равен КПД нагревания полного чайника? Полезным эффектом является нагревание именно воды. Тепловыми потерями в окружающую среду пренебречь.

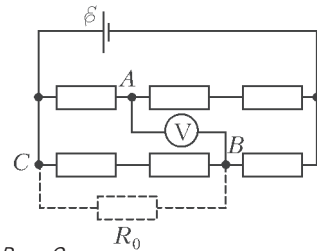


Рис. 9

**Задача 5. Ноль-прибор**

В электрической цепи (рис.9) напряжение на батарейке равно  $\xi = 12$  В, сопротивление каждого из резисторов  $R = 15$  Ом. К клеммам  $A$  и  $B$  подключен вольтметр. Если к клеммам  $C$  и  $B$  подключить резистор сопротивлением  $R_0$ , то вольтметр покажет 0 В. Вычислите сопротивление  $R_0$ .

11 класс

**Задача 1. Новая реакция**

На однородной массивной балке, покоящейся на двух опорах, находится небольшой грузик, имеющий массу  $m$  (рис.10). При смещении грузика на расстояние  $x = 20$  см вдоль балки изменение одной из сил нормальной реакции опоры составило  $\Delta N = 0,2$  Н. Определите массу грузика, если длина балки  $L = 60$  см. При какой массе балки система останется в равновесии при любом положении грузика? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

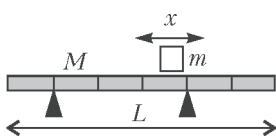


Рис. 10

**Задача 2. Безработная сила**

На тело, имеющее массу  $m = 5$  г, начинает действовать единственная внешняя сила, график зависимости модуля которой от времени приведен на рисунке 11. При какой

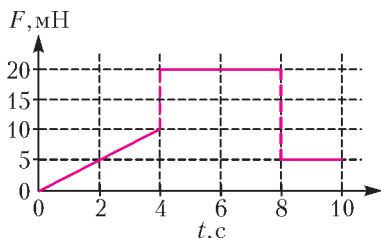


Рис. 11

начальной скорости тела  $v$  работа этой силы за все время ее действия окажется равной нулю? Как должна быть направлена эта начальная скорость по отношению к вектору силы, если он не меняет своего направления?

**Задача 3. Работа в процессе**

На диаграмме зависимости давления  $p$  от температуры  $T$  приведен процесс 1–2 нагрева одного моля идеального газа и процесс 2–3 его охлаждения до некоторой температу-

ры (рис.12). Найдите работу, совершенную газом в процессе 1–2–3, если известно, что в состоянии с наименьшим объемом температура газа равна  $T = 200$  К. Газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль·К)

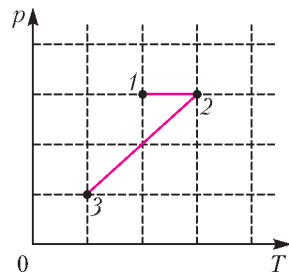


Рис. 12

**Задача 4. Приборы в цепи**

Определите показания электроизмерительных приборов и напряжение на конденсаторе в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 13. Напряжение источника  $U = 12$  В, сопротивление  $R = 2$  кОм. Внутреннее сопротивление амперметра много меньше  $R$ , а внутреннее сопротивление вольтметра много больше  $R$ .

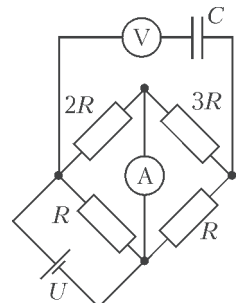


Рис. 13

**Задача 5. Торможение перемычки**

По горизонтальным проводящим рельсам может скользить без трения проводящая перемычка массой  $m$  и длиной  $L$ , расположенная перпендикулярно рельсам (рис.14).

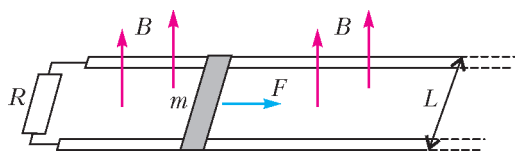


Рис. 14

Рельсы замкнуты на резистор сопротивлением  $R$ . Система находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $B$ . На перемычку начинает действовать постоянная сила  $F$ , направленная вдоль рельсов.

- 1) Найдите максимальную скорость  $v_0$  перемычки.
- 2) Найдите ускорение  $a$  перемычки в тот момент, когда ее скорость достигнет значения  $v_0/3$ .

Публикацию подготовил В.Слободянин

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## ПРИНЦИП ФЕРМА И НЕОБЫЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СВЕТА

1. а) Очевидно, оптимальными могут быть только две траектории. Первая из них – по полю по прямой между домами. Эквивалентная длина такой траектории равна

$$l_0 = 2nb.$$

(Эквивалентная длина траектории, по определению, численно совпадает со временем, требуемым для ее прохождения телом, чья скорость движения по дороге равна единице.) Вторая траектория – это ломаная, состоящая из трех звеньев. Первое и третье из них – это одинаковые по длине отрезки от своего дома до дороги. Оптимальный угол  $\beta$  между каждым из этих отрезков и дорогой удовлетворяет равенству

$\cos \beta = \frac{1}{n}$ . Обозначим через  $x$  проекцию каждого отрезка на прямую, по которой пролегает дорога; т.е. его смысл ровно такой же, как в задачах 1 и 2 в статье, и все геометрические соотношения для  $x$  остаются в силе. Тогда эквивалентная длина пути во втором варианте есть  $l_1 = 2n\sqrt{a^2 + x^2} + (2b - 2x)$ . Учитывая, что

$$x = \frac{a}{\sqrt{n^2 - 1}}, \text{ получаем} \\ l_1 = 2b + 2a\sqrt{n^2 - 1}.$$

Теперь находим  $\Delta l = l_0 - l_1$ :

$$\Delta l = 2(n-1)b - 2a\sqrt{n^2 - 1} = \\ = 2\sqrt{n-1}(b\sqrt{n-1} - a\sqrt{n+1}).$$

Условию  $\Delta l = 0$  соответствует

$$n_0 = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

При  $n < n_0$  предпочтительнее первый вариант, т.е. прямо по полю, а при  $n > n_0$  выгоднее второй – по ломаной линии.

б) Когда дома находятся по разные стороны дороги, также возможны два варианта. Первый – по прямой, соединяющей дома. Он выгоден при  $x > b$ , т.е. при выполнении неравенства

$$n^2 < 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Если же  $x < b$  и, следовательно,  $n^2 > 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2$ , то лучшей оказывается траектория по ломаной. Можно заметить, что в этом варианте эквивалентный путь будет ровно таким же, как и путь по ломаной в первом случае, так как при «зеркальном отражении» домов относительно дороги эквивалентная длина ломаных, очевидно, не меняется.

2. Легко понять, что такая ситуация реализуется, когда критический угол равен  $45^\circ$ . При

этом отношении скоростей кошки на дороге и в поле равно  $\sqrt{2}$ .

3. От зенита.

$$5. y = \frac{2n_0 \sin \alpha_0}{p\sqrt{k}} \left( e^{\frac{p}{2}x} - 1 \right).$$

6. Заметим, что как лучи, пришедшие снизу, так и лучи, впоследствии ушедшие вниз, можно считать проходящими через некоторую очень удаленную точку, находящуюся внизу, под центром полуокружностей. А поэтому, согласно принципу Ферма, время прохождения каждого из этих лучей одинаково. Отсюда следует инвариантность величины  $rn(r) = \text{const}$ , где  $r$  – радиус произвольно выбранной дуги. Так как по условию  $n(x_0) = n_0$ , то  $rn(r) = x_0 n_0$ , откуда получим

$$n(r) = \frac{x_0 n_0}{r}.$$

7. На оси  $x$  должен существовать участок, на котором выполняется неравенство  $\frac{n_0 \sin \alpha_0}{n(x)} < 1$ ; в этом случае луч, дойдя до границы этого участка, развернется и пойдет назад. Причем полная траектория луча от входа до выхода имеет осевую симметрию относительно перпендикуляра к линии раздела, проходящего через точку наибольшего удаления.

$$8. R = \frac{x_0}{2\pi}, \quad t = \sqrt{2\pi} \frac{x_0}{g}.$$

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Например, могли прийти 17 детей без мам, у каждой из которых по одному ребенку, и одна мама с двумя детьми.

2. 300 и 0.

Числа 77 и 55 должны делиться на глубину исходной коробки. У 77 и 55 общие множители только 1 и 11. Если глубина равна 1, то после съедания переднего слоя ничего не осталось.

Если считать, что сахар все же остался, то глубина коробки 11. Тогда ширина  $77 : 11 = 7$  кубиков, а высота, после того как верхний слой съеден,  $55 : 11 = 5$  кубиков.

Итого высота оставшегося в коробке сахара 5, ширина 6, глубина 10 кубиков. Значит, в коробке осталось  $5 \times 6 \times 10 = 300$  кубиков сахара.

3. 3 краски.

Двух красок (скажем, белой и красной) не хватит: покрасив доску номер 1 в белый цвет, Том будет вынужден покрасить в красный цвет доску с номерами 4, 5 и 7. Тогда между красными



досками номер 4 и номер 7 будет ровно две доски, что нарушает требование условия. Трех красок достаточно: Том может покрасить три доски подряд в белый цвет, потом три доски в синий, потом три – в красный, потом снова три – в белый и так далее.

4. Преобразуем разность:

$$\begin{aligned} \underbrace{11\dots1}_{2k} - \underbrace{22\dots2}_k &= \\ &= \underbrace{11\dots1}_{k} \underbrace{100\dots0}_k - \underbrace{11\dots1}_k = \underbrace{11\dots1}_k \cdot \left( \underbrace{10\dots0}_k - 1 \right) = \\ &= \underbrace{11\dots1}_k \cdot \underbrace{99\dots9}_k = 9 \cdot \underbrace{11\dots1}_k \cdot \underbrace{11\dots1}_k = \left( 3 \cdot \underbrace{11\dots1}_k \right)^2. \end{aligned}$$

**КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА**

(см. «Квант» №5-6 за 2016 г.)

6. Не получится.

Предположим, что получится.

Раз у всех детей станет поровну пятерок, можно считать, что у них станет по  $x$  пятерок.

Пусть количество мальчиков  $m$ , а количество девочек  $d$ . И суммарное количество пятерок у мальчиков, и суммарное количество пятерок у девочек увеличиваются каждый раз на 1, значит, в итоге эти количества станут равны, т.е.  $mx = dx$ . Получается, что  $m = d$ , но  $m + d = 23$ , а 23 – нечетное число. Противоречие.

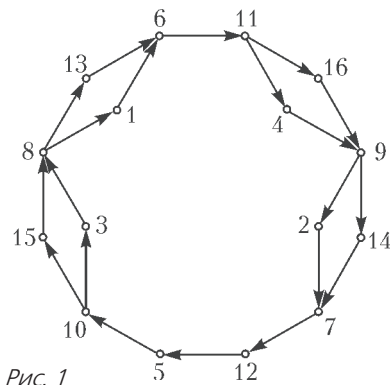
7. Не сможет.

Скажем, как действовать Васе, чтобы получить 240. Разобьем числа на пары: 1 и 2, 3 и 5, 4 и 6. Когда Петя положит одну из карточек в одну из пар скобок, положим в ту же пару скобок другое число из пары. Тогда через три пары ходов итоговый результат будет равен  $(1 + 2) \cdot (3 + 5) \cdot (4 + 6) = 240$ .

8. Может оказаться на 4-м и на 16-м этажах.

*Первое решение.* Построим граф движения лифта по этажам дома (рис.1).

Из этого графа видно, что после одного резуль- тативного нажатия лифт окажется на 6 этаже, а



затем, какие бы кнопки лифта ни нажимались, после 12 результативных нажатий лифт снова окажется на 6 этаже и т.д. В результате после  $97 = 1 + 8 \cdot 12$  результативных нажатий лифт будет находиться на 6 этаже, а еще после 2 нажатий лифт окажется на 4 или 16 этаже.

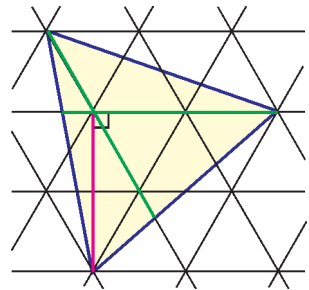
*Второе решение.* Каждым действием к номеру этажа прибавляется 5 или вычитается 7. Числа 5 и -7 дают одинаковые остатки при делении на 12. Таким образом, после 98 переездов мы окажемся на этаже с номером, дающим такой же остаток при делении на 12, как число  $1 + 98 \cdot 5 = 491$ , т.е. на 11 этаже.

Докажем, что 98 переездов сделать можно. Это так, поскольку дом достаточно высокий (16-этажный). Если бы дом был, скажем, 11-этажным, то человек, попавший на 7 этаж, «застрял» бы на этом этаже, поскольку с него невоз- можно движение ни вверх, ни вниз. Но в 16-этажном доме такая ситуация невозможна, по- тому что если номер этажа не больше 11, то можно прибавить 5, а в остальных случаях можно вычесть 7.

Итак, 98 переездов можно сделать, и после это- го мы окажемся на 11-м этаже. После еще од- ного переезда можем попасть как на 4-й, так и на 16-й этаж.

9. *Первое решение.* Треугольники  $BEC$  и  $AFB$  равны по двум сторонам и углу между ними. Значит,  $180^\circ - \angle AEP = \angle BEC = \angle AFP$ , таким образом, четырехугольник  $AEPF$  вписанный. Тогда равны вписанные углы  $EPA$  и  $EFA$ , но  $\angle EFA$  прямой, так как треугольник  $EFA$  пря- моугольный (одна сторона в 2 раза больше дру- гой и угол между ними  $60^\circ$ ).

*Второе решение.* Нарисуем сетку из равносто- ронних треугольников. Нарисуем на ней равно- сторонний треугольник, как на рисунке 2. Дос- таточно доказать утверждение задачи для него, так как все равносторонние треугольники по- добны, а все последующие построения не зави- сят от абсолютных размеров треугольника. Се- рия параллельных линий сетки делит его сторо- ну на 3 равные ча- сти (по теореме Фалеса). Значит, два зеленых отрез- ка в треугольнике – это как раз от- резки  $BF$  и  $CE$  из условия задачи. Таким образом,  $P$  – также узел сет- ки, и теперь уже прямота искомого угла очевидна.



**10. 52.**

Оценим сверху число ходов, которые потребуются при любом начальном порядке карточек. Сделаем две попытки: в первой попытке будем приводить начальную ситуацию к порядку 1, 2, 3, ..., 15, а во второй – к порядку 15, 14, 13, ..., 1. Для первой попытки проводим обмены соседних карточек  $m, n$  таких, что  $m < n$ , но  $m$  правее  $n$ . Например, сначала карточку 1 обменяем со всеми карточками, которые левее нее, в результате чего она окажется на самой левой позиции. Затем «сдвинем» карточку 2 влево и переведем на второе место слева и т.д. Во второй попытке действуем аналогично, но каждый раз меняем местами карточки  $m$  и  $n$  такие, что  $m < n$ , но  $m$  правее  $n$ . Каждая конкретная пара карточек поменяется местами ровно в одной из двух попыток. (Например, посмотрим на пару карточек 5 и 10. Если в начальной позиции 5 находится в ряду левее, чем 10, то обмен этой пары карточек будет производиться во второй попытке, но не будет производиться в первой попытке.) Следовательно, суммарное количество ходов в первой и во второй попытках равно количеству всевозможных пар карточек, т.е. равно  $15 \cdot 14/2 = 105$ . Значит, хотя бы в одной из попыток мы совершили не более чем  $\lceil 105/2 \rceil = 52$  хода.

Остается привести пример начальной ситуации, в которой меньше 52 ходов не хватит. Пусть изначально карточки лежат в порядке 15, 14, 13, 12, 3, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Пусть конечная ситуация 1, 2, ..., 15. Тогда в процессе должны поменяться местами карточки во всех парах  $m < n$ , для которых в начальной расстановке  $m$  правее  $n$ , таких пар 52, это пары

(14, 15), (13, 15), ..., (1, 15);  
 (13, 14), (12, 14), ..., (1, 14);  
 (12, 13), (11, 13), ..., (1, 13);  
 (11, 12), (10, 12), ..., (1, 12);  
 (1, 3), (2, 3).

Если же конечная ситуация 15, 14, ..., 1, то в процессе должны поменяться местами карточки во всех остальных 53 парах.

В любом случае получить конечную ситуацию меньше чем за 52 хода не удастся.

**XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ****ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2016 ГОД)**

Базовый вариант

8–9 классы

**1. Не могло.**

*Первое решение.* Пусть взяли  $x$  четных чисел и  $y$  нечетных ( $x + y = 5$ ). Тогда нечетных сумм

оказалось  $xy$ . Если бы все суммы оканчивались разными цифрами, то  $xy$  было бы равно 5 и  $x + y$  должно было бы равняться 6.

*Второе решение.* Рассмотрим сумму  $S$  полученных десяти сумм. Если эти суммы оканчиваются на десять разных цифр, то число  $S$  нечетно. Но каждое из исходных пяти чисел входит в четыре суммы, поэтому число  $S$  четно. Противоречие.

**2. Все шесть.**

Возьмем равнобедренный треугольник с углом  $108^\circ$ . Поделим этот угол на три равные части (рис.3). Образовавшиеся шесть треугольников будут, очевидно, равнобедренными.

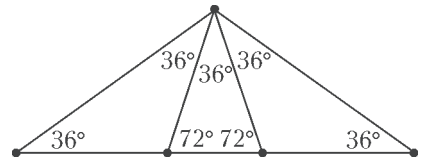


Рис. 3

*Замечание.* Пример единственен.

**3. а)** Найдутся две соседние точки с номерами разной четности. Соединим их и мысленно удалим. Из оставшихся точек снова можно выбрать две соседние и т.д. В итоге все точки разобьются на нужные пары.

**б)** Неверно. Занумеруем точки в естественном порядке. Отрезок, соединяющий два числа одной четности, разобьет оставшиеся точки на две нечетные кучки, которые на пары уже не разбить.

**4.** Пусть  $O$  – центр параллелограмма (рис.4).

Тогда  $OM$  – средняя линия треугольника

$CAK$  ( $OM = \frac{1}{2}AK$  и

в случае, когда  $K$  лежит на прямой  $CA$ ).

Поэтому в треугольнике  $BMD$  медиана  $MO$  равна половине противоположной стороны  $BD = AK$ . Значит, угол  $BMD$  прямой.

*Замечание.* Если  $AK \parallel BD$ , то треугольник  $BMD$  вырождается и угол  $BMD$  не имеет смысла.

**5. 100 ягод.**

Заметим, что на каждом шаге, если оба участвующих медвежонка имели хотя бы по ягоде, у них по крайней мере по ягоде останется. Поэтому в конце у каждого медвежонка останется не меньше одной ягоды.

Докажем, что лиса может оставить каждому медвежонку ровно по одной ягоде, т.е. перейти

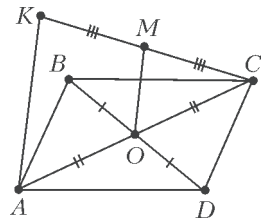


Рис. 4

из позиции  $(1, 2, \dots, 2^{99})$  в позицию  $(1, 1, \dots, 1)$ . Для этого докажем по индукции, что в случае  $n$  медвежат лиса из позиции  $(1, 2, \dots, 2^{n-1})$  может перейти в позицию  $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1})$ , а из последней – в позицию  $(1, 1, \dots, 1)$ .

**База.** При  $n = 1$  все три позиции совпадают.  
**Шаг индукции.** Из позиции  $(1, 2, \dots, 2^{n-1}, 2^n)$ , забыв про последнего медвежонка, можно по предположению индукции перейти сначала в  $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1}, 2^n)$ , а потом в  $(1, 1, \dots, 1, 2^n)$ . Задействовав последних двух медвежат, лиса переходит в позицию  $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1}, 2^{n-1})$ . Теперь, снова забыв про последнего медвежонка, можно перейти в позицию  $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1})$ , а из нее, забыв про первого, – в позицию  $(1, 1, \dots, 1)$ .

10–11 классы

1. 0.

**Первое решение.** Пусть вершины парабол – точки  $(a, b)$  и  $(c, d)$  соответственно. Тогда уравнения парабол:  $y = p(x - a)^2 + b$  и  $y = q(x - c)^2 + d$ . Принадлежность вершин записывается условиями:  $d = p(c - a)^2 + b$  и  $b = q(a - c)^2 + d$ . Складывая их и сокращая, получим  $(p + q)(a - c)^2 = 0$ . Если  $a = c$ , то и  $b = d$ , а вершины различны. Поэтому  $p + q = 0$ .

**Второе решение.** Пусть  $A$  и  $B$  – вершины парабол. Рассмотрим третью параболу, симметричную первой относительно середины отрезка  $AB$ . Она имеет вершину  $B$  и содержит точку  $A$ . Поскольку парабола однозначно определяется своей вершиной и еще одной точкой, третья парабола совпадает со второй. Значит, старшие коэффициенты исходных парабол отличаются только знаком.

3.  $2^{100} - 101$ .

См. решение задачи 5 для 8–9 классов.

Сложный вариант

8–9 классы

2. Может.

Запишем в черных клетках единицы, а в белых клетках – все числа от 1 до 32. При любом разрезании на доминошки в каждой будет ровно одна белая и одна черная клетка. Поэтому суммы в доминошках будут 2, 3, ..., 33.

**Замечание.** Существует пример, когда наибольшее число равно 21, а также известно, что оно не может быть меньше 20.

3. **Первое решение.** Пусть  $H$  – ортоцентр одного из закрашенных треугольников. Присоединив к нему три соседних белых треугольника, получим *двойной треугольник*. Понятно, что  $H$

является в этом двойном треугольнике центром описанной окружности. Прорезав такие действия для всех закрашенных треугольников, получим шесть равных двойных треугольников с общей вершиной  $T$ . Поэтому ортоцентры всех закрашенных треугольников лежат на окружности с центром  $T$  радиуса  $TH$ .

**Второе решение.** Рассмотрим два закрашенных треугольника с общей вершиной  $A$ . Они симметричны относительно  $A$ . Их высоты, выходящие из  $A$ , перпендикулярны  $TA$ , где  $T$  – центр большого треугольника. Значит, их ортоцентры симметричны относительно  $TA$ . Поэтому расстояние от  $T$  до этих ортоцентров одно и то же. Поскольку это верно для любой пары соседних закрашенных треугольников, то ортоцентры всех этих треугольников равноудалены от  $T$ .

4. 32 конфеты.

**Оценка.** При раскладке, указанной на рисунке 5, ни одну из 16 черных конфет съесть нельзя, а из 33 белых можно съесть не больше 32 конфет, в силу четности.

**Алгоритм.** Покажем, что 32 конфеты можно съесть при любой раскладке. В трехклеточном уголке всегда можно съесть пару конфет. Значит, в прямоугольнике  $2 \times 3$  можно съесть 4 конфеты. В квадрате  $7 \times 7$  можно разместить 8 таких прямоугольников (рис. 6).

5. Всегда.

**Первое решение.** Все искомые числа различны, иначе на карточках некоторые числа были бы равны. Так как их попарные произведения положительны, то все числа одного знака, а так как их попарные суммы положительны, то этот знак – плюс.

Обозначим искомые числа  $x < y < z$ . Для карточек каждого цвета рассмотрим отношение наибольшего числа на них к наименьшему. В одном случае это  $\frac{y+z}{x+y}$ , в другом –  $\frac{z}{x}$ . Так как первое отношение меньше второго, то понятно, на каких карточках написаны суммы, а на каких – произведения.

Знание попарных сумм трех чисел определяет эти числа. Например,

$$x = \frac{1}{2}((x+y) + (x+z) - (y+z)).$$

**Второе решение.** Пусть искомые числа  $0 \leq x \leq y \leq z$ . Тогда  $x+y \leq x+z \leq y+z$  и  $xy \leq xz \leq yz$ . Пусть  $a \leq b \leq c$  – числа на карточках одного цвета,  $A \leq B \leq C$  – другого. Тогда

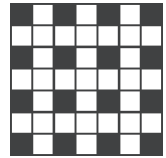


Рис. 5

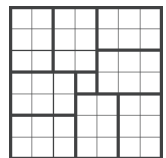


Рис. 6

да  $x = \sqrt{\frac{(a+A+1)(b+B+1)}{c+C+1}} - 1$ . Аналогично

вычисляются  $y$  и  $z$ .

**6.** Пусть  $C$  – середина дуги  $A_3A_{n-1}$ . Прямые  $A_2A_{2n}$  и  $OC$  параллельны как перпендикуляры к диаметру  $A_1A_{n+1}$ . Диагонали  $A_3A_n$  и  $A_{n-1}A_2$  симметричны относительно прямой  $OC$ , поэтому  $F$  лежит на ней. Далее можно рассуждать по-разному.

*Первый способ.* Пусть  $B$  – середина дуги  $A_1A_{2n}$  (рис.7). Диагонали  $A_1A_{2n-1}$  и  $A_{2n}A_2$  симметричны относительно прямой  $OB$ , поэтому пересекаются на ней в точке  $S$ . Прямые  $OB$

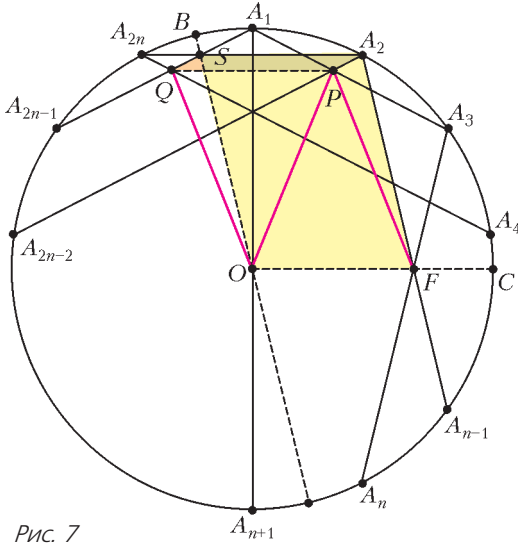


Рис. 7

и  $A_2A_{n-1}$  параллельны ввиду равенства дуг, заключенных между ними. Следовательно,  $FOSA_2$  – параллелограмм.

При симметрии относительно диаметра  $A_1A_{n+1}$  точка  $P$  переходит в точку  $Q$  пересечения диагоналей  $A_1A_{2n-1}$  и  $A_{2n}A_4$ . Прямые  $A_1A_{2n-1}$  и  $A_2A_{2n-2}$ , очевидно, параллельны. Прямые  $PQ$  и  $A_2A_{2n}$  параллельны как перпендикуляры к диаметру  $A_1A_{n+1}$ . Следовательно,  $PQSA_2$  – параллелограмм.

Значит, отрезок  $PQ$  параллелен и равен отрезку  $A_2S$ , а он, в свою очередь, – отрезку  $FO$ . Тогда  $PQOF$  – тоже параллелограмм. Поэтому  $PF = QO = PO$ .

*Второй способ.* Пусть  $A_2A_{2n}$  и  $A_1A_3$  пересекаются в точке  $K$  (рис.8). Заметим, что углы  $A_3KA_2$ ,  $A_3OA_2$ ,  $A_3FA_2$  измеряются дугой  $A_3A_2$ . Значит, точки  $A_3$ ,  $A_2$ ,  $K$ ,  $O$  и  $F$  лежат на одной окружности. Следовательно, трапеция  $KOFA_2$  – равнобокая.

Угол  $A_{2n}A_2A_{2n-2}$  также измеряется дугой

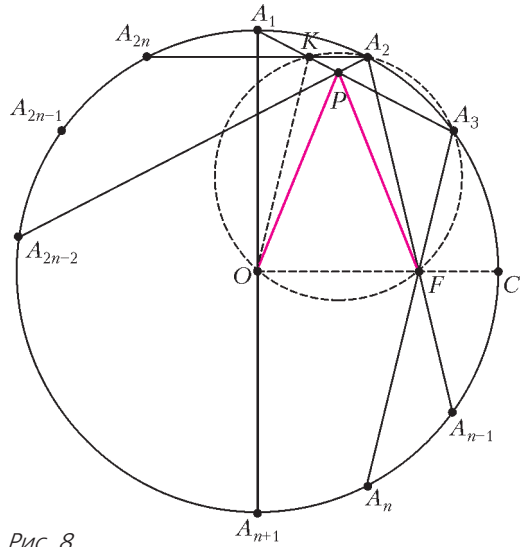


Рис. 8

$A_3A_2$ . Поэтому треугольник  $KPA_2$  – равнобедренный, т.е.  $P$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $KA_2$ , а этот перпендикуляр является осью симметрии указанной трапеции. Следовательно,  $PF = PO$ .

**7.** а) Не обязательно.

Можно считать, что варианты ответов – «да» и «нет».

*Пример 1.* Пусть в опросниках встречались все комбинации по 9 «да» и комбинация из 20 «да». Возьмем любые 10 вопросов и произвольную комбинацию ответов на них. Если среди них все 10 «да», то так ответил последний человек, иначе подберем ответы на остальные вопросы так, чтобы оказалось ровно 9 «да». Таким образом, условие выполнено. Если бы у двух из этих человек отличались ответы на все вопросы, то сумма количеств «да» у них равнялась бы 20, что невозможно.

*Пример 2.* Пусть в опросниках встречались все комбинации, где число ответов «да» кратно 3. Ясно, что произвольную комбинацию ответов на 10 вопросов можно дополнить до такой. Двух противоположных наборов ответов не встретится, так как 20 не кратно 3.

*Замечание.* Этот пример показывает, что 10 можно заменить на 18. Можно доказать, что при замене на 19 ответ изменится.

б) Обязательно.

Пронумеруем ответы на каждый вопрос числами от 1 до 12, тогда набор ответов человека – это строка из 20 чисел. Выберем среди отвечающих 11 человек так, чтобы ответ первого начинался на 10 единиц, второго – на 10 двоек и т.д. Покажем, что можно составить строку  $N$ ,

которая на последних 10 местах отличается в каждом месте от любой из данных 11 строк. Рассмотрим какое-нибудь место, например 17-е. В этих 11 строках на этом месте есть не более 11 различных чисел, поэтому какое-то из чисел от 1 до 12 там не встречается. Именно его и поставим на это место в строку  $N$ . По условию, есть человек Ч, чьи ответы полностью совпали с заполненной частью строки  $N$ . Рассмотрим его ответы в первой половине строки. На 10 местах встречаются не более 10 различных чисел, поэтому какое-то из чисел  $k$  от 1 до 11 там не встречается. Но тогда ответы Ч ни в каком месте не совпали с ответами  $k$ -го из выбранных 11 человек.

10–11 классы

3. Пусть  $K$  и  $L$  – середины  $AC$  и  $BD$  соответственно. Отрезки  $OK$  и  $OL$  перпендикулярны, соответственно, хордам  $AC$  и  $BD$  окружности  $\Omega$ . Пусть  $K'$  – точка, диаметрально противоположная точке  $O$  на  $\Omega_1$ . Поскольку  $L$  лежит на  $\Omega_1$ , то угол  $OLK'$  прямой. Значит, прямая  $BD$  проходит через  $K'$ . Далее можно рассуждать по-разному.  
Первый способ. Можно считать, что углы  $A$  и  $D$  острые (рис.9). Углы  $ALB$  и  $BLC$  равны как

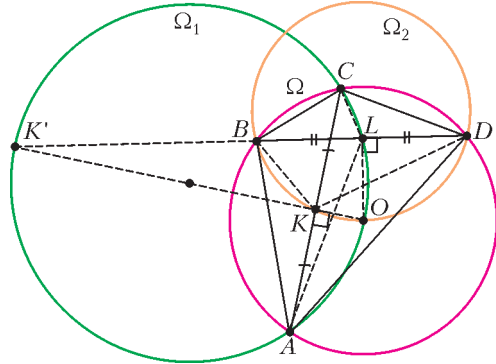


Рис. 9

опирающиеся на равные дуги  $AK'$  и  $CK'$  окружности  $\Omega_1$ . Поэтому

$$\angle BLC = \frac{1}{2} \angle ALC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle ADC.$$

Значит, треугольники  $ACD$  и  $BCL$  подобны по двум углам. Отсюда  $AC : AD = BC : BL$ , т.е.

$$BC \cdot AD = BL \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot AC.$$

По теореме Птолемея,

$$DC \cdot AB = BC \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot AC = KC \cdot BD.$$

Из равенства  $DC \cdot AB = KC \cdot BD$  следует подо-

бие треугольников  $CKD$  и  $BAD$  (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно,  $\angle CKD = \angle BAD$ . Аналогично, из равенства  $BC \cdot AD = KC \cdot BD$  получаем, что равны углы  $CKB$  и  $BAD$ . Поэтому  $\angle BKD = 2\angle BAD = \angle BOD$ , т.е. точка  $K$  лежит на окружности  $\Omega_2$ .

Второй способ. При инверсии относительно  $\Omega$  прямая  $AC$  переходит в окружность  $\Omega_1$ , а точка  $K$  – в точку  $K'$ . Так как  $K'$  лежит на прямой  $BD$ , то  $K$  лежит на ее образе – на  $\Omega_2$ .

6. 4 рубля.

Трех рублей не хватит, поскольку, называя произвольные различные числа  $a, b$  и  $c$ , Вася мог получить ответы 0, 1, 2 соответственно, если у Пети оказался многочлен  $P(x) = (c-b)x^{2n} + b$  с подходящим  $n$ . Ответ 0 возможен, так как число  $r = \frac{a-b}{c-b}$  отлично от 0 и 1, поэтому при некотором  $n$  уравнение  $x^{2n} = r$  не имеет решений в целых числах.

**Лемма.** Если многочлен  $Q(x)$  с целыми коэффициентами имеет больше двух различных целых корней, то многочлены  $Q(x) \pm 1$  не имеют целых корней.

**Доказательство.** Многочлен  $Q$  можно записать так:  $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)R(x)$ , где  $R(x)$  – многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что при каком-то целом  $x$  это выражение равно  $\pm 1$ . Тогда каждая из скобок равна  $\pm 1$ . Значит, какие-то две скобки равны, т.е. равны какие-то два из корней  $a, b$  и  $c$ . Противоречие.

Покажем, как выиграть, имея 4 рубля. Будем называть ответы, кроме 0, 1, 2, *большими*.

Вася называет числа 5 и 8. Если на одно из них, например на 8, окажется большой ответ, то Вася называет 7 и 9. Согласно лемме, ответами будут нули.

Если оба ответа будут маленькие, Вася называет 6 и 7. Если на одно из этих чисел будет большой ответ, то вокруг него ответы нулевые. В противном случае, будет четыре ответа трех видов, что гарантирует совпадение.

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ**

7 класс

1. 1 парсек  $\approx 3,3$  светового года.

2.  $\rho = \frac{M_2 - M_1}{1,1(V_2 - V_1)} = 1,21 \text{ г/см}^3$ ;

$m = \frac{M_1}{1,1} - \rho V_1 = 53 \text{ г}.$



$$3. v = \frac{l}{t_1 - t_2} = 30 \text{ м/с}, L = vt_2 = 900 \text{ м};$$

$$t_3 = \frac{l}{v} = 15 \text{ с}; \frac{L}{l} = 2.$$

$$4. v_{\max} = 5 \text{ м/с}; s = 80 \text{ м};$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{20}{15} \text{ м/с} = 1,33 \text{ м/с}.$$

8 класс

$$1. l_{\text{тр}} \approx 2,3 \text{ км}.$$

$$2. m_{\text{сн}} = m \frac{\rho_0 h}{4\rho H} = 101 \text{ кг}.$$

$$3. P = cm \left( \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_0} + 1 \right) \frac{t_k - t_2}{\tau} = 630 \text{ Вт}.$$

$$4. M = \frac{m}{3} = 2 \text{ кг}; F_{\lambda} = \frac{mg}{3} = 20 \text{ Н}.$$

9 класс

$$1. v_{\text{ср}} = \frac{23}{24} v = 9,6 \text{ м/с}.$$

$$2. a = \sqrt{\frac{Mgp_1}{\rho_2 p_3}}, b = \sqrt{\frac{Mgp_2}{\rho_1 p_3}}, c = \sqrt{\frac{Mgp_3}{\rho_1 p_2}};$$

$$m = M - \rho \sqrt{\frac{(Mg)^3}{\rho_1 \rho_2 \rho_3}}.$$

$$3. \rho_1 = \frac{5}{3} \rho, \rho_2 = \rho. \quad 4. \alpha = \frac{\tau_1 + \tau_2 - \tau_0}{\tau_1}.$$

$$5. U_{\text{в}} = 12 \text{ В}, I_{\text{а}} = 12 \text{ мА}.$$

10 класс

$$1. u = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\tau} \approx 1,8 \text{ м/с}, \text{ где } \tau = \sqrt{\frac{2b}{g}} \approx 0,18 \text{ с};$$

$$P = \frac{mgb}{\tau} \approx 590 \text{ Вт}.$$

2. Тело 1 останется неподвижным,  $a_1 = 0$ , а тело 2 начнет движение с ускорением

$$a_2 = \frac{a}{2} = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

$$3. m = \frac{\Delta NL}{gl} = 80 \text{ г}. \quad 4. \eta_2 = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + 1} = 0,92.$$

$$5. R_0 = \frac{2}{3} R = 10 \text{ Ом}.$$

11 класс

$$1. m = \frac{\Delta NL}{2gx} = 30 \text{ г}; M = 2m = 60 \text{ г}.$$

2. Начальная скорость равна 11 м/с и направлена противоположно вектору силы.

$$3. A = \frac{1}{2} vRT = 831 \text{ Дж (здесь } v = 1 \text{ моль)}.$$

$$4. I_{\text{а}} = \frac{U}{2R} = 3 \text{ мА}, U_{\text{в}} = 0.$$

$$5. 1) v_0 = \frac{RF}{(BL)^2}; 2) a = \frac{2F}{3m}.$$

## ШАХМАТНАЯ СТРАНИЧКА

ПАРТИЯ КАРЛСЕН–ГИРИ

Следует сделать ход 59. ♚с8+. После этого черные вынуждены отдать ферзя: 59... ♜е8 60. ♚:е8 ♜:е8 61. ♙:е8, либо получают мат в 2 хода: 59... ♜h7 60. ♚f7+ ♜h6 61. ♚h8x

ГОЛОВОЛОМКИ

1) 1. ♚:c2 2. ♜:c2 3. ♚:c3 4. ♜:c3 5. ♜:d4

2) 1. ♙:a1 2. ♙:b3 3. ♙:b3 4. ♙:d2 5. cd 6. dc 7. cb

# КВАНТ

12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, С.А.Дориченко, А.А.Егоров,  
Е.М.Епифанов, А.Л.Канунников,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ  
РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

Журнал «Квант» зарегистрирован

в Комитете РФ по печати.

Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

в соответствии с предоставленными  
материалами

в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru

## Можно ли ИГРАТЬ В ШАХМАТЫ ОДНОМУ?

На этот вопрос давно нашли ответ кинематографисты, периодически используя комический (как в журнале «Ералаш») или драматический (как в короткометражке «Игра Джери») образ шахматиста, играющего с самим собой.

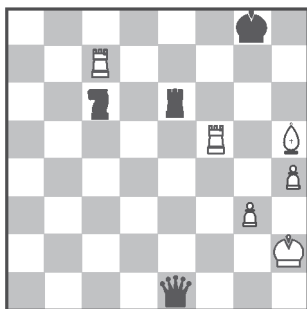
На самом деле играть в шахматы, сидя в одиночестве перед шахматной доской, можно не только в кино, а если вооружиться фантазией и хорошей литературой, то можно выбрать себе в соперники практически любого шахматиста, даже чемпиона мира!

Если вы только недавно начали интересоваться шахматами или же чувствуете пробелы в знании основных дебютов, то в качестве тренировочного материала можно использовать серию книг «В какую силу я играю» В.Кострова и И.Александрова. Эта серия посвящена всем основным дебютам, по каждому из них приводятся тестовые партии, в которых нужно предугадывать ходы соперников. В зависимости от сложности хода за правильное его нахождение начисляется определенное количество очков. Суммарное количество очков, набранных по итогам тест-партии, позволяет определить примерную силу игры в конкретном дебюте. Детальная проработка этих партий позволит вам хорошо ориентироваться в различных началах и улучшить знание основных дебютных вариантов.

Если же вы чувствуете себя уже серьезным любителем шахмат, то можно значительно повысить качество игры, обращаясь к партиям шахматных классиков. Если вас больше интересует тактическая борьба, то стоит изучить сборники партий

М.Таля, Г.Каспарова; если же вы хотите узнать больше о позиционной игре, то заслуживают внимания сборники партий Х.-Р.Капабланки и А.Рубинштейна, которого особенно рекомендовал в своей недавно вышедшей книге «Принятие позиционных решений в шахматах» известный современный гроссмейстер Б.Гельфанд. Изучая эти партии, также стоит попробовать предугадывать ходы, однако особую ценность представляют комментарии авторов, в которых они объясняют свои замыслы.

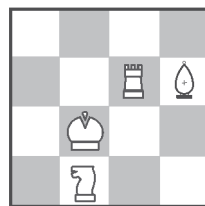
Такой метод описан в книге А.Котова «Как стать гроссмейстером». Благодаря глубокому погружению, он позволяет лучше изучить типовые позиции миттельшпиля и эндшпиля, а также научиться у ведущих гроссмейстеров технике реализации перевеса в этих позициях. Кроме того, он способен принести большое моральное удовлетворение, ведь время от времени выпадает возможность сыграть лучше даже, чем чемпион мира! Вот свежий пример.



К такой позиции пришла партия М.Карлсена и А. Гири, сыгранная в 2017 году в Вейк-ан-Зее. Чемпион мира сыграл 59. ♖f7+?, пройдя мимо простого выигрыша, вскоре допустил еще несколько неточностей, и партия в итоге закончилась вничью. Сможете ли вы найти форсированно выигрывающий вариант?

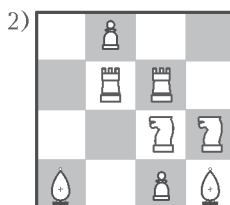
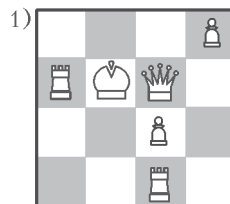
А можно ли играть в шахматы

вообще без соперника? Финский инженер по программному обеспечению Веса Тиммонен придумал игру-головоломку «шахматы для одного», основанную на шахматных правилах. В этой игре фигуры одного цвета расставляются на доске 4×4, смысл игры заключается в том, чтобы, съедая каждым ходом по одной фигуре, оставить в итоге на доске ровно одну фигуру. Исключений из традиционных шахматных правил в этой игре всего два: достигнув последнего ряда, пешка не превращается в другую фигуру, а король может находиться под шахом. При этом короля нельзя съесть: в каждом задании, в котором присутствует король, он должен оставаться последней фигурой на доске. Вот пример.



Эта задача решается в 3 хода:  
1. ♖:c3 2. ♔:c3 3. ♖:d3.

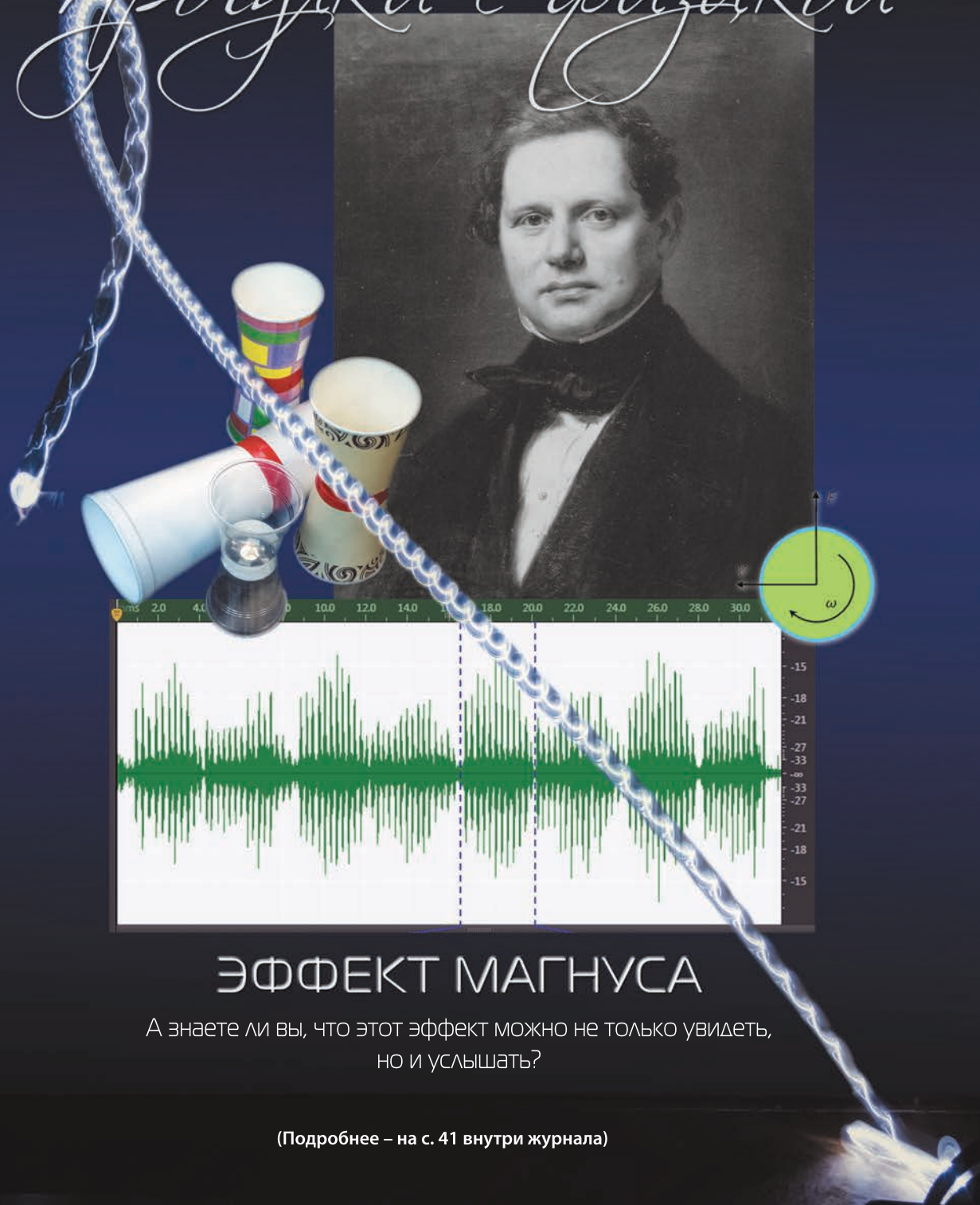
Попробуйте самостоятельно решить более сложные варианты этой головоломки!



А.Русанов

Индекс 90964

# Игрушки с физикой



## ЭФФЕКТ МАГНУСА

А знаете ли вы, что этот эффект можно не только увидеть,  
но и услышать?

(Подробнее – на с. 41 внутри журнала)